UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

Facoltà di Scienze

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di laurea triennale

Elementi di Teoria dei Gruppi: aspetti matematici e applicazioni fisiche

Relatore

Prof. Umberto D'Alesio

Tesi di

Andrea Melis

ANNO ACCADEMICO 2015-1016

Indice

INTRODUZIONE

Nel presente lavoro di tesi si vogliono illustrare le basi della teoria matematica nota come *teoria dei gruppi,* mettendo in evidenza quanto possibile gli aspetti fisici ad essa legati. L'importanza di tale teoria, specialmente nelle applicazioni fisiche, sta nel fatto che essa è lo strumento matematico ideale per studiare le simmetrie delle strutture matematiche che descrivono i sistemi fisici. Una simmetria di un sistema, è un insieme di trasformazioni che lasciano invariate certe proprietà del sistema. L'insieme di trasformazioni che conservano questa proprietà invariante costituisce un gruppo, detto *gruppo di simmetria.* In questo lavoro di tesi non vogliamo approfondire il concetto di simmetria, bensì si vogliono porre le basi per intraprendere lo studio della teoria dei gruppi. Il presente lavoro è strutturato come segue.

Nel primo capitolo introdurremo le nozioni fondamentali per lo studio della struttura algebrica nota come *gruppo.* Definiremo quindi un gruppo in maniera astratta attraverso una serie di assiomi, fornendo le proprietà più significative per le applicazioni a cui siamo interessati.
Il secondo capitolo è dedicato alla teoria delle rappresentazioni dei gruppi, che studia le proprietà dei gruppi astratti in termini di trasformazioni lineari di spazi vettoriali. In sostanza, si stabilisce una corrispondenza tra il gruppo astratto G e il gruppo delle matrici quadrate, e ciò consente di ridurre i problemi di teoria dei gruppi a problemi di algebra lineare. In questo contesto daremo alcuni esempi di rilievo in fisica (SO(3) e SU(2)) e studieremo la relazione che lega queste due strutture.
Nel terzo capitolo studiamo una particolare classe di gruppi: i gruppi di Lie. Questi sono gruppi continui, pertanto i loro elementi possono essere parametrizzati per mezzo di variabili continue che variano in un certo *range.* Successivamente definiremo l'algebra associata a un gruppo di Lie, che descrive la struttura del gruppo in maniera infinitesima. Verranno poi dati alcuni esempi di gruppi di Lie (SO(3) e SU(2)), derivandone le loro algebre.
Nel quarto capitolo tratteremo due strutture di gruppo estremamente importanti nelle applicazioni fisiche: il gruppo di Lorentz e il gruppo di Poincaré. Nella prima parte del capitolo introdurremo la notazione relativistica e le operazioni fondamentali nello spazio di Minkowski -generalizzazione quadridimensionale dello spazio Euclideo- introducendo le trasformazioni di Lorentz e di Poincaré, trasformazioni che lasciano invariata la metrica dello spazio-tempo. Successivamente mostreremo che le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo, e individuando le varie componenti, definiremo l'algebra della componente connessa all'identità ($L_+^\uparrow$). Costruiremo poi la rappresentazione spinoriale di $L_+^\uparrow$ attraverso la relazione con il gruppo di $SL(2,\mathbb{C})$, arrivando a derivare l'equazione di Dirac come conseguenza delle proprietà di trasformazione degli spinori sotto trasformazioni di Lorentz. Infine ci occuperemo brevemente del gruppo di Poincaré, mostrandone gli aspetti più rilevanti.

1 ELEMENTI BASE DI TEORIA DEI GRUPPI

1.1 ASSIOMI DI GRUPPO E ALCUNI ESEMPI

Definizione 1.1.1 (Gruppo $(G,*)$): Una coppia (G,∗) dove G è un insieme di elementi non vuoto e $*$ un'operazione binaria su G (detta moltiplicazione o prodotto)

$$* : G \times G \longrightarrow G$$

è detta *gruppo* se valgono le seguenti proprietà

i. $g_1 * g_2 \in G \quad \forall\, g_1, g_2 \in G \quad (chiusura)$

ii. $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3 \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G \quad (associativa)$

iii. esistenza dell'elemento $e \in G$ tale che
$e * g = g * e = g \quad \forall g \in G \quad (elemento\ neutro\ o\ identit\grave{a})$

iv. esistenza dell'elemento $g^{-1} \in G$ per ogni $g \in G$ tale che
$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e \quad (elemento\ inverso)$

Se il gruppo $(G,*)$ gode dell'ulteriore proprietà

v. $g_1 * g_2 = g_2 * g_1 \quad \forall g_1, g_2 \in G \quad (propriet\grave{a}\ commutativa)$

è detto *gruppo commutativo o abeliano.*

Dagli assiomi di gruppo si possono derivare alcune conseguenze immediate, che hanno tuttavia il pregio di essere estremamente utili

Lemma

a. L'elemento neutro di G è unico.
b. Ogni $g \in G$ ha un unico inverso in G.
c. Per ogni $g \in G, (g^{-1})^{-1} = g$
d. Per ogni $g_1, g_2 \in G, (g_1 * g_2)^{-1} = g_2^{-1} * g_1^{-1}$

Notazione: Successivamente il prodotto tra due elementi di un gruppo verrà indicato come

$$g_1 * g_2 \equiv g_1 g_2$$

Scriveremo più brevemente "gruppo G" invece di gruppo (G,∗).

Definizione 1.1.2 (Ordine): Il numero di elementi che compongono un gruppo è detto *ordine del gruppo.* Se l'ordine è finito il gruppo si dice finito; altrimenti infinito.

Esempio 1: L'insieme dei numeri interi forma un gruppo (commutativo) per l'addizione $(\mathbb{Z}, +)$. L'operazione di gruppo è definita

$$a * b = a + b \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

La proprietà di chiusura e quella associativa sono verificate banalmente. L'elemento neutro è lo zero. L'inverso del generico elemento $a \in \mathbb{Z}$ è $(-a) \in \mathbb{Z}$.

Esempio 2: Il gruppo delle permutazioni di tre oggetti S_3 forma un gruppo *non abeliano* di ordine 6. Gli elementi del gruppo sono le 6 trasformazioni (a sinistra) che portano tre oggetti (ABC) messi in posizioni (123) a permutare in tutti i possibili modi

(e) : $(ABC) \rightarrow (ABC)$ non fare niente
(12) : $(ABC) \rightarrow (BAC)$ permutare gli oggetti nella posizione 1,2
(23) : $(ABC) \rightarrow (ACB)$ permutare gli oggetti nella posizione 2,3
(13) : $(ABC) \rightarrow (CBA)$ permutare gli oggetti nella posizione 1,3
(123) : $(ABC) \rightarrow (CAB)$ permutazione ciclica
(321) : $(ABC) \rightarrow (BCA)$ permutazione anticiclica

La legge di moltiplicazione si trova direttamente, per esempio:

$$(12) * (23) = (123)$$

Infatti

$$\begin{aligned}(23) &: (ABC) \longrightarrow (ACB)\\ (12) &: (ACB) \longrightarrow (CAB)\end{aligned}$$

(N.B. l'operazione che sta a destra va eseguita per prima). Il gruppo analogo delle permutazioni di n oggetti è S_n con ordine $n!$.

I gruppi finiti sono completamente caratterizzati se si costruisce la tavola di moltiplicazione tra i loro elementi. Nel caso specifico del gruppo S_3 questa è:

$(\boldsymbol{e})$	$(\mathbf{12})$	$(\mathbf{23})$	$(\mathbf{13})$	$(\mathbf{123})$	$(\mathbf{321})$
$(\mathbf{12})$	(e)	(123)	(321)	(23)	(31)
$(\mathbf{23})$	(321)	(e)	(123)	(31)	(12)
$(\mathbf{13})$	(123)	(321)	(e)	(12)	(23)
$(\mathbf{123})$	(31)	(12)	(23)	(321)	(e)
$(\mathbf{321})$	(23)	(31)	(12)	(e)	(123)

Tabella 1. 1 Tavola di moltiplicazione di S_3

Esempio 3: L'insieme delle matrici $n{\times}n$ non singolari rispetto all'ordinaria moltiplicazione righe per colonne forma un gruppo *non abeliano*. Alcuni esempi di gruppi di matrici sono:

i. Il *gruppo lineare generale* $GL(n)$ consiste nella totalità delle matrici non singolari, ovvero matrici $A \in M(n)$ tali che $detA \neq 0$;

ii. il *gruppo ortogonale* $O(n)$ consiste nell'insieme delle matrici reali ortogonali, cioè matrici $O \in M(n, \mathbb{R})$ tali che $OO^T = I$;

iii. il gruppo unitario $U(n)$ fotmato dall'insieme delle matrici unitarie $U \in M(n, \mathbb{C})$ tali che $UU^\dagger = I$.

iv. *il gruppo ortogonale speciale* $SO(n)$ e *il gruppo unitario speciale* $SU(n)$ consistono, rispettivamente, nelle matrici ortogonali e unitarie con determinante unitario.

1.2 PRINCIPALI PROPRIETÀ STRUTTURALI DEI GRUPPI

In generale, si è spesso interessati a sottoinsiemi di un gruppo G che hanno proprietà algebriche che derivano da quelle di G. Tra questi si presentano naturalmente quelli che cadono sotto la seguente

Definizione 1.2.1 (Sottogruppo): Un sottoinsieme H di un gruppo G si dice *sottogruppo di* G (e si indica con $H \leq G$) se H è dotato della stessa struttura di gruppo rispetto alla legge di composizione definita su G.

Riprendendo gli esempi dei gruppi di matrici considerati precedentemente, si ha ad esempio che $SO(n) \leq O(n) \leq GL(n)$, così come $SU(n) \leq U(n) \leq GL(n)$.

Esempio (Sottogruppo ciclico): Sia g un elemento di un gruppo G. L'insieme

$$< g > = \{g^n, \qquad n \in \mathbb{Z}\} \tag{1.1}$$

è un sottogruppo di G detto *sottogruppo ciclico di G*. Se accade che $G =< g >$ allora G è detto *gruppo ciclico generato da* g.

Definizione 1.2.2 (Elementi Coniugati): Sia G un gruppo. Due elementi $g_1, g_2 \in G$ si dicono *coniugati* (e si indica con $g_1 \sim g_2$) se esiste un elemento $f \in G$ tale che

$$g_1 = f g_2 f^{-1} \tag{1.2}$$

Definizione 1.2.3 (Classi di coniugazione): L'insieme degli elementi di un gruppo che sono coniugati gli uni con gli altri formano una *classe di coniugazione* (o semplicemente *classe*).

Con la relazione di *coniugio* si individua una relazione di equivalenza sul gruppo, che induce su di esso una partizione[1]. Ciò significa che il gruppo si può leggere come un'unione disgiunta delle sue classi di equivalenza. Nel caso di gruppi di matrici, tutti

---

[1] Una partizione su G è una divisione di G in sottoinsiemi, detti appunto classi, che coprono G senza sovrapporsi.

gli elementi appartenenti alla stessa classe sono legati mediante una "trasformazione di similitudine".

Definizione 1.2.4 (Sottogruppo invariante): Un sottogruppo $H \leq G$ è detto *invariante* (o *normale,* in simboli $H \trianglelefteq G$) se

$$ghg^{-1} = h' \in H \quad \forall g \in G \;\; e \;\; \forall h \in H \tag{1.3}$$

Ogni gruppo possiede almeno due sottogruppi banali: $\{e\}$ e G stesso. Un gruppo G che non possiede sottogruppi invarianti non banali è detto *semplice.* È detto *semisemplice* se non possiede sottogruppi invarianti "abeliani" (può quindi possedere sottogruppi invarianti ma che non godono della proprietà commutativa).

Definizione 1.2.5 (Laterali di un Sottogruppo): Sia H un sottogruppo di G e sia g∈ G un elemento (fisso) che non appartiene a $H.$ L'insieme

$$gH = \{gh, \qquad h \in H\} \tag{1.4}$$

è detto *laterale sinistro di H* (*left coset*). Analogamente, l'insieme

$$Hg = \{hg, \qquad h \in H\} \tag{1.5}$$

è detto *laterale destro di H (right coset).*

Due laterali sinistri di un sottogruppo $H,$ o coincidono o non hanno alcun elemento in comune. Dato $gH,$ al variare di $g \in G$ ottengo una partizione di G, cioè posso ricoprire G con l'unione disgiunta di queste classi.

Lemma: Se $H \leq G$ è un sottogruppo invariante di $G,$ ogni laterale sinistro coincide con il laterale destro, cioè $gH = HG.$

Dimostrazione
Poiché $H \trianglelefteq G$ si ha $ghg^{-1} = h' \in H$ per ogni $g \in G \; e \; h \in H.$ Moltiplicando a destra per l'elemento g trovo che

$$gh = h'g \tag{1.6}$$

cioè ogni elemento in Hg è anche in $gH,$ quindi coincidono.

Definizione 1.2.6 (Gruppo fattore) Sia H un sottogruppo invariante di $G.$ L'insieme dei laterali H in G indicato come

$$G/H = \{gH, \qquad g \in G\} \tag{1.7}$$

dotato della seguente legge di composizione

$$(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H \tag{1.8}$$

è detto *gruppo fattore (o quoziente) di G rispetto a H.* il gruppo fattore G/H soddisfa a tutti gli assiomi del gruppo con l'elemento neutro eH.

Definizione 1.2.7 (Prodotto Diretto): Siano H_1 e H_2 due sottogruppi di un gruppo G con le seguenti proprietà

i. Ogni elemento di H_1 commuta con ogni elemento di H_2, cioè
$$h_1 h_2 = h_2 h_1 \quad per\ ogni\ \ h_1 \in H_1\ e\ h_2 \in H_2$$
ii. ogni elemento $g \in G$ può essere scritto in modo unico come
$$g = h_1 h_2 \quad con\ h_1 \in H_1\ e\ h_2 \in H_2$$

In tal caso il gruppo G è detto *prodotto diretto di* H_1 *e* H_2 e si scrive $G = H_1 \otimes H_2$. Alcuni gruppi di simmetria utilizzati in fisica sono prodotti diretti. Un esempio è il gruppo prodotto diretto tra SO(3) e SU(2), che rappresenta l'addizione del momento angolare orbitale e lo spin di un sistema quantistico.

1.3 OMOMORFISMI TRA GRUPPI

Definizione 1.3.1 (Omomorfismo) Siano G e G' due gruppi. Un *omomorfismo* tra i gruppi G e G' è un'applicazione $\phi : G \longrightarrow G'$ che preserva la legge del gruppo. In altre parole

$$g_i \in G \ \xrightarrow{\phi}\ \phi(g_i) = g_i' \in G'$$

ϕ è un omomorfismo se per ogni $g_1, g_2 \in G$

$$g_1 g_2 \xrightarrow{\phi} \phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) \in G'$$

Lemma

i. L'elemento neutro di G' è $e' = \phi(e)$
ii. Per l'elemento inverso di $\phi(g)$ si ha $\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1})$

Dimostrazione

i. Siano $g, e \in G$,
$$ge = g \ \xrightarrow{\phi}\ \phi(g)\phi(e) = \phi(g) \in G'$$
quindi $\phi(e) = e'$ è l'elemento neutro di G'.
ii. Sia $g \in G$,
$$gg^{-1} = e \ \xrightarrow{\phi}\ \phi(g)\phi(g^{-1}) = e'$$
da cui, moltiplicando a sinistra per l'inverso di $\phi(g)$, $\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1})$.

In particolare, dato l'omomorfismo $\phi: G \longrightarrow G'$

- se l'applicazione è biunivoca (esiste cioè ina relazione uno ad uno tra gli elementi di G e G'), ϕ si dice *isomorfismo.*
- se l'applicazione è tale che $G = G', \phi$ è detto *endomorfismo.*
- se l'applicazione è biunivoca e si ha inoltre $G = G'$ ϕ è detta *automorfismo.*

Esempio: L'applicazione seguente

$$\phi : GL(n,\mathbb{C}) \longrightarrow (\mathbb{C}-0)$$
$$M \mapsto detM$$

è un *omomorfismo*. È invece un *isomorfismo* l'applicazione

$$\psi : (R,+) \longrightarrow (R^{+}-0)$$
$$x \mapsto e^{x}$$

Definizione 1.3.2 (Nucleo e Immagine di un Omomorfismo): Sia ϕ un omomorfismo tra i gruppi G e G'. Chiamiamo *nucleo (o kernell)*, e lo indichiamo con $ker\phi = K$, l'insieme degli elementi di G trasformati in e' da ϕ

$$ker\phi = \{g \in G \mid \phi(g) = e'\} \tag{1.9}$$

L'*immagine di* ϕ, indicata con $Im\phi = I$, è l'insieme degli elementi di G'trasformati da ϕ a partire dagli elementi di G

$$Im\phi = \phi(G) \tag{1.10}$$

Teorema 1.3.1: Sia $\phi : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo. Il nucleo K forma un *sottogruppo invariante di G.* Inoltre è possibile costruire un'applicazione $\psi : G/K \longrightarrow G'$ che risulta essere un *isomorfismo.*

Dimostrazione

i. Siano $k_1, k_2 \in K$. $\phi(k_1k_2) = \phi(k_1)\phi(k_2) = e' \implies k_1k_2 \in K$.
$k \in K$. $\phi(kk^{-1}) = e' = \phi(k^{-1}) \implies k^{-1} \in K$
$\phi(e) = e' \implies e \in K$
pertanto K è un sottogruppo

ii. Sia $k \in K$ e $g \in G$. Si ha

$$gkg^{-1} \xrightarrow{\phi} \phi(gkg^{-1}) = \phi(g)\phi(k)\phi(g^{-1}) = \phi(g)e'\phi(g)^{-1} = e'$$

quindi $gkg^{-1} \in K$

iii. Sia $g_1K \xrightarrow{\psi} \psi(g_1K) = g'$. Se $\psi(g_1K) = \psi(g_2K)$, consideriamo

$$\psi(g_1^{-1}g_2K) = \psi(g_1^{-1}K * g_2K) = \psi(g_1^{-1}K)\psi(g_2K) = \psi(g_1K)^{-1}\psi(g_2K) = e'$$

quindi $g_1^{-1}g_2K = K$, cioè $g_2K = g_1K$. Pertanto l'applicazione ψ è biunivoca.

1.4 ROTAZIONI NELLO SPAZIO EUCLIDEO TRIDIMENSIONALE

In meccanica classica i fenomeni fisici si svolgono nello *spazio euclideo tridimensionale* $\mathbb{R}^3$. Una *rotazione* che agisce sui vettori dello spazio $\mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare delle coordinate dello spazio che lascia *invariata la distanza.*

Consideriamo un punto $(x, y, z) \equiv (x_1, x_2 x_3)$ di $\mathbb{R}^3$ e un altro punto infinitesimamente vicino $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$. Il vettore che unisce questi due punti è

$$d\boldsymbol{x} = (dx_1, dx_2, dx_3) \tag{1.11}$$

e la distanza tra questi due punti e per definizione la lunghezza di $d\boldsymbol{x}$

$$distanza = |d\boldsymbol{x}| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = \left(\sum_{i=1}^{3} dx_i^2\right)^{1/2} \tag{1.12}$$

Introducendo la delta di Kronecker δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ \ se \ \ i = j \\ 0 \ \ se \ i \neq j \end{cases} \tag{1.13}$$

la distanza euclidea assume la forma

$$d\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}} = \sum_i \sum_j \delta_{\boldsymbol{ij}} dx_i dx_j \tag{1.14}$$

(in termini matematici, questa espressione indica che $\mathbb{R}^3$ è uno spazio di Riemann con δ_{ij} come tensore metrico). Consideriamo ora una trasformazione lineare delle coordinate

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} x_j \tag{1.15}$$

con R_{ij} costanti reali, che possiamo pensare come gli elementi di una matrice 3×3. Imponiamo ora che la distanza venga preservata

$$d\boldsymbol{x}'^2 = d\boldsymbol{x}^2 \tag{1.16}$$

cioè

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} dx'_i dx'_i &= \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} R_{ij} dx_j\right)\left(\sum_{k=1}^{3} R_{ik} dx_k\right) \\ &= \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} R_{ij} R_{ik}\right) dx_j dx_k \end{aligned} \tag{1.17}$$

Affinché questa quantità sia uguale a $d\boldsymbol{x}^2$, deve essere

$$\sum_{i=1}^{3} R_{ij}R_{ik} = \sum_{i=1}^{3} (R^T)_{ji}R_{ik} = \delta_{jk} \tag{1.18}$$

La condizione (1.18) diventa, in forma matriciale,

$$R^T R = I \tag{1.19}$$

Questo fatto indica che le matrici delle rotazioni sono matrici ortogonali, quindi $R \in O(3)$. Le (1.18) sono sei condizioni sugli elementi di R, che ha perciò 9-6=3 elementi indipendenti: ogni rotazione in $\mathbb{R}^3$ è dunque identificata da tre parametri.

Dalla condizione (1.19) si ricava

$$\det(R^T R) = detR^T detR = (detR)^2 = detI \tag{1.20}$$

da cui

$$detR = \pm 1 \tag{1.21}$$

Si chiamano *rotazioni proprie* quelle con $\det\mathrm{R} = 1$, e rappresentano rotazioni senza inversione degli assi. Il caso $\det R = -1$ corrisponde invece a rotazioni che incorporano un'inversione spaziale (e sono dette *rotazioni improprie*). Le rotazioni proprie formano un sottogruppo di $\mathrm{O}(3)$, indicato con $\mathrm{SO}(3)$. Infatti, la matrice identità appartiene ovviamente a $\mathrm{SO}(3)$, così come il prodotto di due matrici di $\mathrm{SO}(3)$ ($detR_1R_2 = \det\mathrm{R}_1\det\mathrm{R}_2 = 1$ con $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2 \in \mathrm{SO}(2)$); inoltre, essendo matrici non singolari, ammettono l'inversa R^{-1}, che appartiene sempre ad $\mathrm{SO}(3)$ ($\det\mathrm{R}^{-1} = 1/\det\mathrm{R} = 1$ con $\mathrm{R} \in \mathrm{SO}(3)$). Al contrario, le rotazioni improprie non formano un gruppo: non contengono la matrice identità e non formano un insieme chiuso rispetto all'operazioni di prodotto tra matrici.

2 RAPPRESENTAZIONI DI UN GRUPPO

2.1 RAPPRESENTAZIONI

Definizione 2.1.1 (Rappresentazione di un Gruppo) Sia G un gruppo e V uno spazio vettoriale. Una rappresentazione lineare di G in uno spazio vettoriale V è un omomorfismo $\mathrm{D} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL(V)}$ dove $\mathrm{GL(V)}$ è il gruppo delle trasformazioni lineari invertibili di V in se stesso (cioè il gruppo degli automorfismi di V).

Poiché ad ogni operatore lineare invertibile da V in V posso associare una matrice quadrata non singolare, ogni elementi $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$ è rappresentato da una matrice

$$g \mapsto D(g)$$

con la condizione di rispettare le proprietà del gruppo, cioè

$$D(g_1g_2) = D(g_1)D(g_2) \quad \forall g_1g_2 \in G \tag{2.1}$$

da cui segue che $\mathrm{D(e) = I}$, $\mathrm{D(g^{-1}) = [D(g)]^{-1}}$.

Lo spazio V è chiamato spazio della rappresentazione e la dimensione di V è la dimensione della rappresentazione (supposta finita). Se l'applicazione è iniettiva (isomorfismo), la rappresentazione è detta *fedele*. Quando gli operatori $\mathrm{D(g)}$ sono rappresentati da matrici unitarie per ogni $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$ la rappresentazione si dice *unitaria*.

Definizione 2.1.2 (Rappresentazioni Equivalenti) Due rappresentazioni $\mathrm{D^1(g)}$ e $\mathrm{D^2(g)}$ di G si dicono *equivalenti* se sono in relazione fra loro mediante una trasformazione di similitudine, cioè se esiste una matrice S non singolare tale che

$$D^2(g) = SD^1(g)S^{-1}(g) \quad \forall g \in G \tag{2.2}$$

In sostanza, se vale la (2.2), $\mathrm{D^1}$ e $\mathrm{D^2}$ differiscono semplicemente per un cambiamento di base.
Rappresentazioni equivalenti formano *classi di equivalenza*. È sufficiente conoscere un membro di tale classe per generare gli altri membri mediante tutte le possibili trasformazioni di similitudine.

2.1.1 Rappresentazioni riducibili e irriducibili

Un concetto particolarmente importante nella teoria delle rappresentazioni e delle loro applicazioni e quello della riducibilità. Diamo le seguenti

Definizione 2.2.1 (Sottospazio Invariante) Sia D una rappresentazione di G nello spazio vettoriale V. Un sottospazio $\mathrm{V_1} \subset \mathrm{V}$ tale che

$$D(g)V_1 \subseteq V_1 \quad \forall g \in G \tag{2.3}$$

è detto *sottospazio invariante* per la rappresentazione D, cioè l'applicazione di D sugli elementi di $\mathrm{V_1}$ restituisce elementi di $\mathrm{V_1}$.

Definizione 2.2.2 (Rappresentazioni Riducibili e Irriducibili) Una rappresentazione D in V si dice *riducibile* se ammette sottospazi invarianti non banali (cioè eccetto V e $\{0\}$). Si dirà invece *irriducibile*, se V non ammette sottospazi invarianti.

Consideriamo una rappresentazione riducibile. Sia $\mathrm{V_1} \subseteq \mathrm{V}$, con $\mathrm{V_1}$ sottospazio invariante per la rappresentazione D e sia $\mathrm{n_1} = \mathrm{dimV_1}$. Posso scegliere una base di V $\{\mathrm{e_1}, \dots, \mathrm{e_{n_1}}, \mathrm{e_{n_1+1}}, \dots, \mathrm{e_n}\}$ tale che $\{\mathrm{e_1}, \dots, \mathrm{e_{n_1}}\}$ sia base di V_1. In questo modo la matrice corrispondente agli operatori $\mathrm{D(g)}$ assumerà la forma

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & S \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

con $D_1(g)$ matrice $n_1{\times}n_1$, $D_2(g)$ matrice $n_2{\times}n_2$ $(n_2 = n - n_1)$ e S matrice $n_1{\times}n_2$.
La matrice $\mathrm{D_1(g)}$ costituisce una rappresentazione di G su $\mathrm{V_1}$.
Se avviene che $\mathrm{S} = 0$ allora anche il sottospazio $\mathrm{V_2} \subset \mathrm{V}$ generato da $\{\mathrm{e_{n_1+1}}, \dots, \mathrm{e_n}\}$ è invariante sotto l'azione di $D(g)$, e la rappresentazione assume una forma "a blocchi" e si dice *completamente riducibile*, cioè

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

In tal caso $\mathrm{D_1}$ e $\mathrm{D_2}$ costituiscono due rappresentazioni di G (con spazio base $\mathrm{V_1}$ e $\mathrm{V_2}$ rispettivamente) di dimensione $\mathrm{n_1}$ e $\mathrm{n_2}$ rispettivamente. Si scrive allora

$$D = D_1 \oplus D_2 \tag{2.6}$$

e si dice che D è *somma diretta* delle due rappresentazioni D_1 e D_2. Se non esiste nessuna base in cui la matrice di una rappresentazione assuma una forma a blocchi, allora tale rappresentazione è irriducibile.

Esempio 1: Il gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ ammette la seguente rappresentazione

$$D: \mathbb{R} \longrightarrow GL_2$$

$$a \in \mathbb{R} \mapsto D(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D è riducibile (ma non completamente riducibile) e ha un solo sottospazio invariante, che sarebbe $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; infatti $D(a)L = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in L$.

2.1.2 Lemma di Shur

Diamo ora un importante risultato della teoria delle rappresentazioni, sul quale si poggiano -direttamente o indirettamente- molte delle applicazioni di teoria dei gruppi alla fisica, noto come Lemma di Schur. Esso vale per qualsiasi tipo di gruppo (finito o infinito, discreto o continuo) e nella sua forma più semplice si può enunciare nel seguente modo

Teorema (Lemma di Schur) Sia G un gruppo e D una rappresentazione *irriducibile*, con spazio base V definito su $\mathbb{C}$ e sia A un operatore lineare $A : V \longrightarrow V$ tale che

$$AD(g) = D(g)A \quad \forall g \in G \tag{2.7}$$

allora deve essere

$$A = \lambda I \tag{2.8}$$

Cioè, in breve, ogni operatore che commuta con tutte le matrici di una rappresentazione irriducibile è necessariamente un multiplo dell'identità.

Dimostrazione

Sia $|v\rangle$ autovettore di A con autovalore λ (ogni matrice ne ammette almeno uno) e sia V_λ il sottospazio degli autovettori di A con autovalore λ. Per quanto detto $V_\lambda \neq \{0\}$. Preso un qualsiasi $|w\rangle \in V_\lambda$, si ha

$$A(D(g)|w\rangle) = D(g)(A|w\rangle) = D(g)(\lambda|w\rangle) = \lambda(D(g)|w\rangle)$$

dunque anche $D(g)|w\rangle \in V_\lambda$ per ogni $g \in G$; ma questo significa che V_λ è un sottospazio invariante per la rappresentazione D. Ma per ipotesi D è irriducibile, e quindi deve essere $V_\lambda = V,$ ovvero che

$$A|v\rangle = \lambda|v\rangle \quad \forall|v\rangle \in V \quad \Longrightarrow (A - \lambda I)|v\rangle = 0$$

che dimostra la (2.8).

2.2 IL GRUPPO SU(2)

Consideriamo il gruppo SU(2), che consiste nell''insieme delle matrici unitarie 2×2 con determinante uguale a uno

$$UU^\dagger = I, \qquad detU = 1 \tag{2.9}$$

Tale gruppo è particolarmente rilevante in fisica in quanto, come vedremo, è utilizzato in meccanica quantistica nello studio dello spin ½. Dalla (2.9) si ricava la forma generale di una matrice di SU(2)

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{2.10}$$

Ponendo $\alpha = a_0 + ia_3$ e $\beta = a_2 + ia_1$, possiamo esprimere U in termini delle matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

e della matrice identità

$$\sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

cioè

$$U = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix} = a_0\sigma_0 + i\sum_{i=1}^{3} a_i\sigma_i \tag{2.13}$$

con i numeri reali $a_0, a_i (i = 1,2,3)$ che soddisfano

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \tag{2.14}$$

Considerando il vettore $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}$, che possiamo scrivere come $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{n}$, essendo $\boldsymbol{n}$ un versore di $\mathbb{R}^3$ e λ uno scalare ($\lambda > 0$), la condizione (2.14) diventa

$$a_0^2 + |\boldsymbol{a}|^2 = a_0^2 + \lambda^2 = 1 \tag{2.15}$$

dunque ha senso porre

$$a_0 = \cos\frac{\theta}{2} \quad , \quad \lambda = \sin\frac{\theta}{2} \tag{2.16}$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Definendo $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, la (2.13) diventa

$$U = a_0\sigma_0 + i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma} = a_0\sigma_0 + i\lambda\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \cos\frac{\theta}{2}I + i\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{2.17}$$

e usando la seguente identità

$$e^{i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = \cos|\boldsymbol{a}|I + i\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin|\boldsymbol{a}| \tag{2.18}$$

la matrice (2.17) si scrive

$$U(\theta\boldsymbol{n}) = e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = \cos\frac{\theta}{2}I + i\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{2.19}$$

La (2.19) definisce una rappresentazione di SU(2), e rappresenta una rotazione nello spazio vettoriale bidimensionale complesso (lo spazio degli spinori di Pauli). Gli elementi di tale spazio sono detti *spinori*, e sono rappresentati da vettori colonna

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} = \epsilon_1\chi_1 + \epsilon_2\chi_2 \quad \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{C} \tag{2.20}$$

dove $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono gli spinori della base. In meccanica quantistica χ_1 e χ_2 rappresentano gli stati di *spin su e spin giù* di una particella con spin ½, e lo spinore $\boldsymbol{\epsilon}$ è lo stato generale di una particella. Una rotazione di un angolo θ attorno alla direzione $\boldsymbol{n}$, trasforma lo spinore come

$$\boldsymbol{\epsilon} \longrightarrow U(\theta \boldsymbol{n})\boldsymbol{\epsilon} \equiv e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\epsilon} \tag{2.21}$$

Per esempio, per una rotazione attorno all'asse *z*, la matrice di rotazione diventa

$$U_z(\theta) = e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_3} = \cos\frac{\theta}{2} I + i \sin\frac{\theta}{2}\sigma_3 = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}; \tag{2.22}$$

Analogamente, per rotazioni attorno agli assi *x* e *y*

$$U_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix};\ U_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Osserviamo che per una rotazione di un angolo di 2π,

$$U_x(2\pi) = -I;\ \ U_y(2\pi) = -I;\ \ U_z(2\pi) = -I \tag{2.24}$$

la funzione d'onda di una particella con spin 1/2 cambia segno, dunque la rotazione di 2π corrisponde ad un cambio di fase degli spinori.

2.3 Relazione tra SO(3) e SU(2)

Mostriamo ora che SU(2) è omomorfo al gruppo SO(3). Definiamo, per ogni vettore posizione $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, la matrice

$$X = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i\sigma_i = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i\,x_2 \\ x_1 + i\,x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Poiché le matrici di Pauli sono hermitiane, anche le matrici (2.25) sono hermitiane

$$X^\dagger = X \tag{2.26}$$

Si osservano inoltre le seguenti proprietà

$$TrX = 0 \tag{2.27}$$

$$detX = -|\boldsymbol{x}|^2 \tag{2.28}$$

Per ogni matrice U $\in \mathrm{SU}(2)$, definiamo la trasformazione

$$X \longrightarrow X' = UXU^\dagger \tag{2.29}$$

La nuova matrice X', è ancora hermitiana. Inoltre, essendo U unitaria, la trasformazione (2.29) preserva le proprietà (2.27) e (2.28), cioè

$$TrX' = TrX = 0 \tag{2.30}$$

$$\det X' = detX \tag{2.31}$$

Dalla (2.30), segue che la matrice "trasformata" X' può essere scritta come combinazione lineare delle matrici di Pauli a partire da un nuovo vettore posizione $\boldsymbol{x}'$, esattamente come è stato fatto per X, quindi

$$X' = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{x}' \tag{2.32}$$

Inoltre, dalle proprietà (2.31) e (2.28) si ha che

$$|\boldsymbol{x}'|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 \tag{2.33}$$

e quindi la trasformazione $X \to X'$ individua una trasformazione ortogonale

$$R(U) : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}' = R(U)\boldsymbol{x} \tag{2.34}$$

$con\ R(U) \in SO(3)$. Mediante la (2.29) si è definita una corrispondenza fra le matrici $U \in SU(2\ )$ e le matrici ortogonali R. Consideriamo allora l'applicazione

$$\begin{aligned} \psi :\ \ & SU(2) \longrightarrow SO(3) \\ & U \mapsto R(U) \end{aligned} \tag{2.35}$$

Dimostriamo che essa è un omomorfismo.
Siano $U, V \in SU(2)$ e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$; per i vettori trasformati di $\mathbb{R}^3$ scriviamo

$$R(U)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{u}}, \qquad R(V)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{v}}, \qquad R(UV)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{uv}} \tag{2.36}$$

Moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{\sigma}$ avremo

$$\begin{aligned} X^u &= \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = U(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})U^\dagger = UXU^\dagger \\ X^v &= \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = V(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})V^\dagger = VXV^\dagger \\ X^{uv} &= \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{uv}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = (UV)(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})(UV)^\dagger = (UV)X(UV)^\dagger \end{aligned} \tag{2.37 }$$

Mostriamo quindi che costruendo le rotazioni tramite ψ, la composizione di due rotazioni agisce su un qualsiasi $\boldsymbol{x}$ come la rotazione relativa al prodotte delle due matrici di SU(2)

$$R(U)[R(V)\boldsymbol{x}] \cdot \boldsymbol{\sigma} = [R(V)\boldsymbol{x}]^{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = U[(R(V)\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}]U^\dagger$$

$$= U[\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\sigma}]U^\dagger = U[V(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})V^\dagger]U^\dagger = (UV)[\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}](UV)^\dagger$$

$$= \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{uv}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = R(UV)\boldsymbol{x}$$

Pertanto $\psi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ preserva l'operazione, ed è quindi un omomorfismo.

Osserviamo che nella (2.29), sostituendo $U \rightarrow -U$ si ritrova la stessa trasformazione, quindi ψ *non è un isomorfismo* e le matrici U e $-U$ portano alla stessa rotazione, $R(U) = R(-U)$: la mappa $SU(2) \rightarrow SO(3)$ è $2 \rightarrow 1$.

3 GRUPPI DI LIE E ALGEBRE DI LIE

3.1 GRUPPI DI LIE

I gruppi di Lie sono una particolare classe di *gruppi continui*, cioè gruppi dotati di una nozione di "vicinanza" tra gli elementi, o meglio di "intorno", in cui ci si può spostare con continuità da un elemento all'altro attraverso una parametrizzazione continua degli elementi del gruppo.
Definiamo in modo più rigoroso cosa si intende per *gruppo continuo:*

Definizione 3.1.1 (Gruppo Continuo) Un gruppo G è detto *continuo a n parametri* se i suoi elementi possono essere parametrizzati da n variabili reali (continue), cioè da un punto dello spazio n-dimensionale $\mathbb{R}^n$, e non più di n variabili sono necessarie. Il numero n è la *dimensione del gruppo* e per ogni $g \in G$ si scrive

$$g = g(\boldsymbol{a}) \quad con \ \ \boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

e devono valere le seguenti proprietà

i. $g(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{b}) = g(\boldsymbol{c})$
ii. $g(\boldsymbol{a})^{-1} = g(\overline{\boldsymbol{a}})$

dove i parametri $\boldsymbol{c}$ e $\overline{\boldsymbol{a}}$ che individuano il "prodotto" di due elementi e l'inverso di un elemento sono individuati da *funzioni continue* dei parametri di "partenza"

$$\boldsymbol{c} = \phi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \ \ , \ \ \overline{\boldsymbol{a}} = \psi(\boldsymbol{a}) \tag{3.2}$$

In tal caso il gruppo è detto *continuo o topologico.*

Definizione 3.1.2 (Gruppo di Lie) Un gruppo di Lie è un gruppo *continuo* in cui le funzioni ϕ e ψ (vedi definizione 3.1.1) sono anche *analitiche.*

Il sottoinsieme V di $\mathbb{R}^n$ cui corrispondono gli elementi di G prende il nome di *varietà*.
Un gruppo topologico è *compatto* quando la sua varietà è chiusa e limitata.

Un'applicazione da $\mathbb{R}$ in G

$$t \in \mathbb{R} \longrightarrow g[a(t)] \equiv g(t)$$

con $a(t) \in \mathbb{R}^n$ continua, è detta *cammino* (*o curva*) in G.

Definizione 3.1.3 (Gruppo Connesso) Sia G un gruppo di Lie. Due elementi $g_1, g_2 \in G$ si dicono *connessi* se esiste un cammino continuo $g(t)$ in G, tale che $g(t_1) = g_1$ e $g(t_2) = g_2$ con $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Un gruppo in cui ogni coppia di elementi è connessa si dice *connesso.*

In altre parole un gruppo è connesso se si possono cambiare con continuità gli elementi per passare da g_1 a g_2. In particolare, se ogni cammino chiuso in G è deformabile con continuità fino a ridursi a un punto, G è detto *semplicemente connesso.* I gruppi di Lie connessi rivestono grande importanza poiché, grazie alla proprietà di analiticità, si può connettere con continuità l'elemento identità a qualsiasi elemento del gruppo.

3.2 ALGEBRE DI LIE

Definizione 3.2.1 (Algebra di Lie) Un'*algebra di Lie* è uno spazio vettoriale $\mathcal{A}$ (su $\mathbb{K}$) dotato di un'operazione interna (prodotto di Lie) da $\mathcal{A}\times\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ che indichiamo con

$$(A,B) \mapsto [A,B] \quad A,B \in \mathcal{A} \tag{3.3}$$

e che soddisfa le seguenti proprietà

i. $[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A,C] + \beta[B,C] \quad \forall\alpha,\beta \in \mathbb{K}\,, \forall A,B,C \in \mathcal{A}$
(Linearità)

ii. $[A,B] = -[B,A] \quad \forall A,B \in \mathcal{A}$
(Antisimmetria)

iii. $\big[A,[B,C]\big] + \big[B,[C,A]\big] + \big[C,[A,B]\big] = 0 \quad \forall A,B,C \in \mathcal{A}$
(Identità di Jacobi)

Studiamo ora le proprietà infinitesime dei gruppi di Lie, cioè le proprietà del gruppo nell'intorno dell'elemento identità. Parametrizziamo gli elementi del gruppo in modo tale che l'identità sia descritta dall'origine $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ in $\mathbb{R}^n$

$$g(\boldsymbol{a})|_{a=0} = e \quad con\ \boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \tag{3.4}$$

Se costruiamo una rappresentazione $D(g) \equiv D\big(g(a)\big) \equiv D(a)$ del gruppo, gli operatori della rappresentazione saranno rappresentati allo stesso modo, e si avrà quindi

$$D(\boldsymbol{a})|_{a=0} = I \tag{3.5}$$

Consideriamo ora piccole perturbazioni nell'intorno dell'identità, cioè trasformazioni infinitesime

$$D(\boldsymbol{a}) \cong I + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial D(a)}{\partial a_i}\right)_{a=0} a_i = I + i\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \tag{3.6}$$

dove le

$$X_i = -i\left(\frac{\partial D(a)}{\partial a_i}\right)_{a=0} \tag{3.7}$$

per $i = 1, \dots n$, sono detti *generatori infinitesimi del gruppo.*

I generatori X_i sono indipendenti, pertanto costituiscono una base dell'algebra di Lie associata a G; l'unità immaginaria è utilizzata nella definizione in modo che se la rappresentazione è unitaria gli X_i sono operatori hermitiani. Applicando infinite volte la trasformazione infinitesima (3.6) è possibile raggiungere qualsiasi elemento del $g(\boldsymbol{a})$ di G connesso all'identità

$$D(a) = \lim_{k\to\infty} \left(I + i \sum \frac{a_i}{k} X_i \right)^k = e^{i\Sigma a_i X_i} = e^{iA} \tag{3.8}$$

Questo procedimento definisce la parametrizzazione esponenziale del gruppo e quindi la legge di composizione stessa. Va notato che, in generale, tale rappresentazione dell'algebra mediante le matrici e^{iA} descrive il gruppo *solo in un intorno dell'identità.* Vale però il seguente teorema, del quale non daremo una dimostrazione

Teorema 3.2.1: Se un gruppo G è *semplicemente connesso* c'è *corrispondenza biunivoca* fra le rappresentazioni del gruppo e quelle della sua Algebra di Lie.

Pertanto gli elementi di un gruppo di Lie semplicemente connesso possono essere rappresentati attraverso la sua parametrizzazione esponenziale (3.8).

Definizione 3.2.2 (Costanti di Struttura) Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Lie generata dalla base formata dai suoi n generatori $\{X_1, \dots, X_n\}$. Presa una qualsiasi coppia (X_i, X_j) di due elementi di questa base, il loro prodotto di Lie $[X_i, X_j]$ sarà ancora un elemento dell'algebra, e quindi è esprimibile come combinazione lineare degli elementi della base, che scriviamo come

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i = i \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k \tag{3.9}$$

I coefficienti (reali) c_{ij}^k sono detti *costanti di struttura dell'algebra di Lie.*
Dall'identità di Jacobi $[X_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_i]] + [X_k, [X_i, X_j]] = 0$ e dalla (3.9), si ricavano le seguenti proprietà per le costanti di struttura

i. $\sum_m \left(c_{ij}^m c_{mk}^l + c_{jk}^m c_{mi}^l + c_{ki}^m c_{mj}^l\right) = 0$
ii. $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$

Le costanti di struttura sono caratteristiche dell'algebra in quanto sintetizzano l'intera legge di composizione del gruppo. Esse determinano completamente l'algebra e non dipendono dalla rappresentazione. Osserviamo che un gruppo di Lie abeliano ha costanti di struttura nulle.

3.2.1 Sottogruppi e Sottoalgebre

Definizione 3.3.1 (Sottoalgebre) Data un'algebra di Lie $\mathcal{A}$, una sottoalgebra $\mathcal{A}_1$ è un sottospazio di $\mathcal{A}$ che è chiuso rispetto al prodotto di Lie, cioè

$$[A, B] = C \quad dove\ A, B, C \in \mathcal{A}_1 \tag{3.10}$$

o simbolicamente $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1] \subset \mathcal{A}_1$.

Definizione 3.3.2 (Sottoalgebra invariante) $\mathcal{A}_1$ è detta *sottoalgebra invariante* di $\mathcal{A}$ se

$$[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}] \subset \mathcal{A}_1 \tag{3.11}$$

cioè se il prodotto di Lie tra gli elementi della sottoalgebra $\mathcal{A}_1$ e gli elementi di $\mathcal{A}$, restituisce un elemento in $\mathcal{A}_1$. Algebre invarianti *generano sottogruppi invarianti.*

Un'algebra che non ha sottoalgebre invarianti è chiamata *semplice.* Algebre che non hanno sottoalgebre invarianti Abeliane sono dette *semisemplici.* Se un'algebra di Lie è semplice o semisemplice, tali sono anche i gruppi di Lie ad essa associati.

Data un'algebra di Lie è conveniente definire il seguente tensore simmetrico

$$g_{ij} = g_{ji} = \sum_{kl} c_{il}^{k} c_{jk}^{l} \tag{3.12}$$

che è noto come *metrica di Killing.* Vale il seguente teorema, che diamo senza dimostrare

Teorema 3.3.1: Un'algebra di Lie è semisemplice se e solo se $\det g \neq 0$.

Diamo la seguente definizione:

Definizione 3.3.3 (Operatore di Casimir) Si chiama *operatore di Casimir* un operatore C, costruito con i generatori X_i di un'algebra di Lie, che commuta con tutti gli X_i, cioè

$$[C, X_i] = 0 \quad \forall i \tag{3.13}$$

Per un'algebra di Lie semisemplice è immediato trovare un operatore di Casimir. Esso è

$$C = \sum_{ij} g^{ij} X_i X_j \tag{3.14}$$

dove g^{ij} è il tensore metrico inverso: $g^{il} g_{lj} = \delta_j^i$.

3.3 ALGEBRA DI SO(3) E SU(2)

Scriviamo l'espressione delle tre rotazioni attorno agli assi (x y e z)

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}, \qquad R_2(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove θ è il parametro di Lie continuo. Cerchiamo ora i corrispondenti generatori infinitesimi

$$X_1 = -i\left(\frac{\partial}{\partial\theta}R_1(\theta)\right)_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = -i\left(\frac{\partial}{\partial\theta}R_2(\theta)\right)_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

$$X_3 = -i\left(\frac{\partial}{\partial\theta}R_3(\theta)\right)_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le regole di commutazione sono date da

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iX_3 \tag{3.17}$$

e permutazioni. Le regole di commutazione si possono scrivere in modo compatto utilizzando il tensore di Levi-Civita

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } \{\text{i, j, k}\} = \text{permutazioni pari di } \{1,2,3\} \\ -1 & \text{se } \{\text{i, j, k}\} = \text{permutazioni dispari di } \{1,2,3\} \\ 0 & \text{se due indici sono uguali} \end{cases}$$

e si ha

$$\left[X_i, X_j\right] = i\epsilon_{ijk}X_k \qquad \left(\epsilon_{ijk} \equiv costanti\ di\ struttura\right) \tag{3.18}$$

Di particolare rilievo è la seguente combinazione quadratica dei generatori

$$X^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \tag{3.19}$$

Questo nuovo operatore è un operatore di Casimir e commuta con tutti i generatori del gruppo.

Si riconosce che le regole di commutazione dei generatori delle rotazioni sono le stesse dell'operatore *momento angolare* $\boldsymbol{L}$. Se infatti L_1 L_2 e L_3 sono le tre componenti, $\boldsymbol{x} = (x, x_2, x_3)$ e $\boldsymbol{p} = -i\frac{h}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$, per la componente i-esima si ha

$$L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k \tag{3.20}$$

dove la somma sugli indici ripetuti è implicita. Facendo uso dei commutatori

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \qquad [x_i, p_j] = i\frac{h}{2\pi}\delta_{ij} \tag{3.21}$$

si ottengono le relazioni di commutazione tra le componenti del momento angolare

$$[L_1, L_2] = i\frac{h}{2\pi}L_3, \qquad [L_2, L_3] = i\frac{h}{2\pi}L_1, \qquad [L_3, L_1] = i\frac{h}{2\pi}L_2 \tag{3.22}$$

o in forma più compatta,

$$[L_i, L_j] = i\frac{h}{2\pi}\epsilon_{ijk}L_k \tag{3.23}$$

che sono appunto le stesse trovate per SO(3). L'operatore di Casimir per l'algebra delle componenti del momento angolare è quindi il modulo quadro del momento angolare.

Per quanto riguarda SU(2), abbiamo visto nel paragrafo 2.3 che ogni matrice U $\in$ $\mathrm{SU}(2)$ si può parametrizzare come

$$U = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix} = a_0\sigma_0 + i\sum_{i=1}^{3} a_i\sigma_i \tag{3.24}$$

con a_0, a_1, a_2, a_3 numeri reali tali che $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Dunque per parametrizzare un elemento di SU(2) sono necessari e sufficienti 3 parametri reali, cioè SU(2) è un gruppo 3-dimensionale. Inoltre, si è visto che è possibile scrivere la generica matrice U $\in$ $\mathrm{SU}(2)$ come

$$U(\theta\boldsymbol{n}) = \cos\frac{\theta}{2}\sigma_0 + i\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}} \tag{3.25}$$

Considerando i 3 sottogruppi ad un parametro

$$U_i(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\sigma_0 + i\sin\frac{\theta}{2}\sigma_i = e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma_i}} \quad i = 1,2,3 \tag{3.26}$$

i relativi generatori sono dati da

$$J_i = -i\left(\frac{dU_i}{d\theta}\right)_{\theta=0} = \frac{\sigma_i}{2} \tag{3.27}$$

Ricordando le proprietà delle matrici di Pauli

$$\begin{aligned} &\sigma_i^2 = I \\ &\sigma_i\sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (i \neq j) \end{aligned} \tag{3.28}$$

possiamo osservare che le tre matrici di Pauli (e quindi le J_i) obbediscono alla stessa algebra di SO(3)

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = \frac{1}{4}\left(\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i\right) = i\epsilon_{ijk}\,\frac{\sigma_k}{2} = i\epsilon_{ijk}J_k \tag{3.29}$$

che è la stessa dei generatori di X_i (3.18).
Sebbene i gruppi SO(3) e SU(2) non siano isomorfi, le loro algebre lo sono. Quando due gruppi di Lie hanno la stessa algebra, come nel suddetto caso, si dicono *localmente isomorfi*.

4 GRUPPO DI LORENTZ E GRUPPO DI POINCARÈ

4.1 TRASFORMAZIONI DI LORENTZ E DI POINCARÉ NELLO SPAZIO DI MINKOWSKI

Lo spazio di Minkowski (o spazio-tempo) è uno spazio vettoriale 4-dimensionale che generalizza lo spazio Euclideo, in cui si introduce una quarta dimensione che è il tempo. Dunque, ogni punto dello spazio-tempo ha quattro coordinate (t, x, y, z) e rappresenta un *evento*. Spazi e tempi non sono grandezze omogenee, e gli elementi dello spazio di Minkowski, che indichiamo con **M**, sono identificati dall'insieme di coordinate di un evento dove la coordinata temporale è moltiplicata per la velocità della luce c

$$x^\mu = (ct, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{4.1}$$

Le coordinate introdotte in (4.1), con gli indici in alto sono chiamate *coordinate controvarianti.*
Introduciamo ora una metrica in **M**, che generalizza la *distanza euclidea* tra due punti dello spazio introducendo una nozione di "prossimità" tra due eventi, definita nel seguente modo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{4.2}$$

dove $dx^\mu = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) = (cdt, dx, dy, dz)$ e $g_{\mu\nu}$ è il cosiddetto *tensore metrico*, rappresentato dalla matrice

$$g_{\mu\nu} \to g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Nella (4.2) gli indici ripetuti si intendono sommati. Esplicitando l'intervallo ds^2 si ha

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = c^2 dt^2 - |d\boldsymbol{x}|^2 \tag{4.4}$$

Introduciamo ora le *coordinate covarianti*, definite come

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{4.5}$$

cioè, esplicitamente

$$x_0 = x^0, \qquad x_1 = -x^1, \qquad x_2 = -x^2, \qquad x_3 = -x^3 \tag{4.6}$$

Alla luce della (4.5) l'intervallo ds^2 può essere riscritto come

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu \tag{4.7}$$

Definiamo ora il tensore metrico controvariante (cioè con gli indici in alto) $g^{\mu\nu}$, che corrisponde alla matrice inversa g^{-1}, cioè

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = g^{\mu}{}_{\rho} \equiv \delta^{\mu}{}_{\rho} \tag{4.8}$$

dove [2] $\delta^{\mu}{}_{\nu} = \delta_{\nu}{}^{\mu}$ è la delta di Kronecker quadridimensionale,

$$\delta^{\mu}{}_{\nu} = \delta_{\nu}{}^{\mu} = \begin{cases} 1 & se\ \mu = \nu \\ 0 & se\ \mu \neq \nu \end{cases} \tag{4.9}$$

Osservando la forma esplicita (4.3) di $g_{\mu\nu}$ si vede che $g^{\mu\nu}$ deve avere le stesse componenti affinché si verifichi la (4.8). Moltiplicando $g^{\mu\nu}$ per le coordinate covarianti si riottengono quindi le coordinate controvarianti

$$x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu} \tag{4.10}$$

Avendo introdotto una struttura metrica nello spazio-tempo **M**, possiamo ora definire le trasformazioni di Lorenz (TL).

Definizione 4.1 (Trasformazioni di Lorentz omogenee e non omogenee) Una *trasformazione di Lorenz omogenea* è una trasformazione lineare e omogenea delle coordinate,

$$x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{4.11}$$

che lascia invariato l'intervallo $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$, cioè la metrica in **M**. Le $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ sono 16 quantità reali costanti, e quindi indipendenti dalle coordinate.
Una trasformazione non omogenea del tipo

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad (a^{\mu}\ costanti) \tag{4.12}$$

che lascia invariato ds^2 è detta trasformazione di *Lorentz non omogenea*, o *trasformazione di Poincaré.* Essa combina una TL omogenea e una traslazione spazio temporale.

La richiesta di invarianza di ds^2 significa che $ds'^2 = ds^2$, quindi

$$g_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g_{\rho\sigma} dx^{\rho} dx^{\sigma} \tag{4.13}$$

da cui, sostituendo la (4.11)

$$g_{\mu\nu} \left(\Lambda^{\mu}{}_{\rho} dx^{\rho}\right)(\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} dx^{\sigma}) = g_{\rho\sigma} dx^{\rho} dx^{\sigma} \tag{4.14}$$

e quindi la condizione generale cui deve obbedire una trasformazione di Lorentz è

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma} \tag{4.15}$$

[2] Per convenzione l'indice a sinistra rappresenta l'indice di riga e quello a destra di colonna indipendentemente se sono in alto o in basso.

La matrice trasposta Λ^{T} ha componenti $(\Lambda^T)^{\nu}{}_{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ e la (4.15) può essere riscritta come

$$(\Lambda^T)^{\rho}{}_{\mu} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma} \tag{4.16}$$

e l'equivalente matriciale diventa

$$\Lambda^T g \Lambda = g \tag{4.17}$$

Questa condizione, con g dato dalla (4.3), definisce un insieme di matrici 4×4 dette *pseudortogonali* e indicato con O(3,1); cioè

$$O(3,1) = \{\Lambda \in M_4(\mathbb{R}) : \Lambda^T g \Lambda = g, \} \tag{4.18}$$

come vedremo più avanti O(3,1) forma un gruppo, il gruppo delle matrici pseudoortogonali, che identificheremo con il gruppo di Lorentz.
L'equazione (4.16) rappresenta 10 vincoli indipendenti (i due membri dell'uguaglianza sono simmetrici in $\rho \leftrightarrow \sigma$), pertanto una TL omogenea è determinata da $16 - 10 = 6$ parametri reali. Una TL non omogenea dipende invece da altri 4 parametri introdotti dalle costanti a^{μ}, quindi da 10 parametri reali.

A questo punto possiamo generalizzare l'insieme di elementi (vettori) dello spazio-tempo di Minkowski introducendo i cosiddetti *quadrivettori:*

Definizione 4.2 (Quadrivettori) Un *quadrivettore controvariante A^{μ}* è un insieme di quattro quantità $(A^0, A^1, A^2 A^3) = (A^0, \boldsymbol{A})$ che per una trasformazione di Lorentz (4.11) si trasformano allo stesso modo delle componenti delle coordinate di x^{μ}, cioè

$$A^{\mu} \longrightarrow A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu} \tag{4.19}$$

Il *quadrivettore covariante* $A_{\mu} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$, si ottiene come nel caso delle coordinate covarianti, moltiplicando il corrispondente quadrivettore controvariante A^{μ} per il tensore metrico $g_{\mu\nu}$

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu} = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) = (A^0, -\boldsymbol{A}) \tag{4.20}$$

Si definisce *il prodotto scalare* tra due quadrivettori A e B come

$$A \cdot B \equiv A^{\mu} B_{\mu} = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = A^0 B^0 - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \tag{4.21}$$

Il *modulo quadro* di un quadrivettore A è il prodotto scalare di A^{μ} con se stesso

$$A^2 \equiv A^{\mu} A_{\mu} = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = (A^0)^2 - |\boldsymbol{A}|^2 \tag{4.22}$$

4.1.1 Classificazione delle trasformazioni di Lorentz omogenee

In questa sezione ci concentreremo sulle trasformazioni di Lorentz omogenee, classificandole e dando alcuni esempi.
Una prima classificazione può essere condotta sulla base del determinante delle matrici corrispondenti. Dalla (4.17) si ha

$$\det(\Lambda^T g\Lambda) = det\Lambda^T \det g \det\Lambda = (\det\Lambda)^2 \det g = detg \qquad (4.23)$$

da cui $(\det\Lambda)^2 = 1$ e quindi

$$\det\Lambda = \pm 1 \qquad (4.24)$$

Le TL con determinante +1 sono dette *proprie,* quelle con determinante -1 *improprie.*
Un'altra classificazione si basa sul segno che assume la componente ${\Lambda^0}_0$ della matrice Λ. Prendendo nella (4.15) $\rho = \sigma = 0$ si ha

$$g_{\mu\nu}{\Lambda^\mu}_0{\Lambda^\nu}_0 = g_{00} \qquad (4.24)$$

cioè, esplicitando il primo membro

$$({\Lambda^0}_0)^2 - ({\Lambda^1}_0)^2 - ({\Lambda^2}_0)^2 - ({\Lambda^3}_0)^2 = 1 \qquad (4.25)$$

da cui si ricava che

$$({\Lambda^0}_0)^2 = 1 + \left({\Lambda^i}_0\right)^2 \geq 1 \qquad (4.26)$$

e quindi

$${\Lambda^0}_0 \geq +1 \quad o \quad {\Lambda^0}_0 \leq -1 \qquad (4.27)$$

Le TL con ${\Lambda^0}_0 \geq +1$ sono dette *ortocrone* mentre quelle con ${\Lambda^0}_0 \leq -1$ *anticrone,* in cui si ha un'inversione dell'asse del tempo.
In base alle varie possibilità date dalle (4.24) e (2.23), si individuano 4 sottoinsiemi di trasformazioni di O(3,1)

$$\begin{cases} L_+^\uparrow \quad \det\Lambda = 1 \quad {\Lambda^0}_0 \geq +1 \qquad \textit{proprie e ortocrone} \\ L_-^\uparrow \quad \det\Lambda = -1 \quad {\Lambda^0}_0 \geq +1 \qquad \textit{improprie e ortocrnone} \\ L_+^\downarrow \quad \det\Lambda = 1 \quad {\Lambda^0}_0 \leq -1 \qquad \textit{proprie e anticrone} \\ L_-^\downarrow \quad \det\Lambda = -1 \quad {\Lambda^0}_0 \leq -1 \qquad \textit{improprie e anticrone} \end{cases}$$

Le TL *proprie e ortocrone* sono chiamate TL *ristrette, o speciali.*

Vediamo ora degli esempi di trasformazioni di Lorentz

Esempio 1: Trasformazioni di velocità (boost)

Le trasformazioni di velocità, o boost, sono trasformazioni di Lorentz che legano le coordinate del quadrivettore posizione x^μ di un sistema di riferimento inerziale $S(t,x,y,z)$ con le x'^μ di un altro sistema di riferimento inerziale $S'(t',x',y',z')$ in moto rettilineo uniforme rispetto al primo.
Nella configurazione *standard*, si assume che S e S' abbiano i tre assi spaziali paralleli, e che il sistema S' si muove con velocità $\boldsymbol{v}$ lungo l'asse x di S e con le origini dei due sistemi di riferimento coincidenti per $t = t' = 0$. In tale contesto le trasformazioni di Lorentz assumono la forma

$$\begin{cases} t' = \dfrac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{4.28}$$

Ponendo $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ $, \beta = \frac{v}{c},\ x^0 = ct,\ x^1 = x,\ ecc.,\ si\ ha$

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \tag{4.29}$$

Associando ai quadrivettori delle matrici colonna, $x^\mu \to (x^0, x^1, x^2, x^3)^T$, possiamo scrivere le (4.29) in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

Dunque la matrice corrispondente ad un boost lungo x è

$$\Lambda_{B_x} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

Analogamente, si trovano le matrici corrispondenti ai boost lungo gli assi y e z

$$\Lambda_{B_y} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

$$\Lambda_{B_z} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

Osserviamo che per tutte e tre le matrici vale

$$\Lambda_{B_i}{}^0{}_0 = \gamma \geq 1 \tag{4.34}$$

e

$$\det \Lambda_{B_i} = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1 \tag{4.35}$$

I boost sono dunque TL proprie ortocrone (TL ristrette).
La relazione (4.35) permette di scrivere

$$\gamma = \cosh\phi, \qquad \gamma\beta = \sinh\phi \tag{4.36}$$

dove il parametro ϕ (detto *rapidità*) è tale che

$$\tanh\phi = \beta = \frac{v}{c} \quad \Longrightarrow \quad \phi = \tanh^{-1}\beta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \tag{4.37}$$

In virtù delle (4.36) possiamo riscrivere le matrici corrispondenti ai boost lungo i tre assi in funzione del parametro *continuo* ϕ

$$\Lambda_{B_x}(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & 0 & 0 \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

$$\Lambda_{B_y}(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh\phi & 0 & -\sinh\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh\phi & 0 & \cosh\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

$$\Lambda_{B_z}(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh\phi & 0 & 0 & -\sinh\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\phi & 0 & 0 & \cosh\phi \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

Esempio 2: Rotazioni

Una rotazione degli assi cartesiani non coinvolge la coordinata temporale, pertanto si può rappresentare con una matrice di Lorentz del tipo

$$\Lambda_R(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R(\boldsymbol{\theta}) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

dove $R(\boldsymbol{\theta})$ è una matrice ortogonale 3×3. Prendendo le rotazioni attorno ai tre assi si hanno le seguenti

$$\Lambda_{R_x}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

$$\Lambda_{R_y}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

$$\Lambda_{R_y}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

Poiché R_x, R_y, R_z sono rotazioni proprie in $\mathbb{R}^3$ (e quindi $\det R_i = 1$), si ha che $\det \Lambda_{\mathrm{R}_i} = 1$, e quindi le (4.42), (4.43), (4.44) sono *TL proprie e ortocrone* ($\Lambda^0{}_0 = 1$). Se la rotazione $R(\boldsymbol{\theta})$ rappresentasse una rotazione impropria, le Λ_R corrispondenti risulterebbero anch'esse improprie.

4.2 IL GRUPPO DI LORENTZ E L'ALGEBRA DEL GRUPPO DI LORENTZ RISTRETTO

Un'importante proprietà delle trasformazioni di Lorentz omogenee[3] è che esse formano un gruppo, *il gruppo di Lorentz* L, isomorfo a $O(3,1)$. Verifichiamo che le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo

1. (*Chiusura*) Se Λ e $\Lambda' \in L$ e $\Lambda'' = \Lambda\Lambda'$ allora $\Lambda'' \in L$. Infatti

$$\Lambda''^T g\Lambda'' = (\Lambda\Lambda')^T g(\Lambda\Lambda') = \Lambda'^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}} g\Lambda\Lambda' = \Lambda'^{\mathrm{T}} g\Lambda' = g$$

e quindi $\Lambda'' \in L$.

[3] Anche le TL *non omogenee* formano un gruppo. Qui ci occuperemo solamente delle TL omogenee.

2. (Associatività) La proprietà associativa segue dall'associatività della moltiplicazione matriciale, e quindi

$$(\Lambda\Lambda')\Lambda'' = \Lambda(\Lambda'\Lambda'')$$

3. (Identità) La matrice identità quadridimensionale I_4, i cui elementi sono individuati da $g^{\mu}{}_{\nu}$ è banalmente una trasformazione di Lorentz.

4. (Inversa) Mostriamo che per ogni $\Lambda \in L$ esiste la trasformazione inversa Λ^{-1}. Per ipotesi

$$\Lambda^{\mathrm{T}} g \Lambda = g$$

da cui, moltiplicando a sinistra per $(\Lambda^{\mathrm{T}})^{-1}$ e a destra per Λ^{-1}

$$g = (\Lambda^{\mathrm{T}})^{-1} g \Lambda^{-1} = (\Lambda^{-1})^{T} g \Lambda$$

e quindi $\Lambda^{-1} \in L$.

L'*insieme delle TL proprie* (L_+) è un sottogruppo di L. Esso è infatti chiuso rispetto alla composizione di due TL, dal momento che, se $\det\Lambda = 1$ e $\det\Lambda' = 1$ anche $\det\Lambda\Lambda' = 1$. Inoltre contiene l'identità ($\det I = 1$) e poiché $\det\Lambda^{-1} = 1/\det\Lambda$, se il determinante di Λ è unitario lo è anche quello di Λ^{-1}.
Anche le *trasformazioni ortocrone* ($L^{\uparrow}$) formano un sottogruppo di L. Si può dimostrare che il prodotto di due TL ortocrone è una TL ortocrona e l'inversa di una TL ortocrona è anch'essa ortocrona. Al contrario, le TL improprie (L_-) e le TL anticrone ($L^{\downarrow}$) non costituiscono un gruppo, giacché i loro insiemi non sono chiusi componendo due trasformazioni dello stesso tipo.
Inoltre, l'intersezione di L_+ e $L^{\uparrow}$, cioè *l'insieme delle TL ristrette* ($L_+^{\uparrow}$), è anch'esso un sottogruppo di L ed è chiamato *gruppo di Lorentz ristretto.* Esso è un *gruppo di Lie* a 6 parametri, 3 legati ai boost e 3 alle rotazioni, e la generica TL ristretta si ottiene dalla composizione dei boost lungo le tre direzioni e delle rotazioni attorno ai tre assi. L'importanza di $L_+^{\uparrow}$ sta nel fatto che esso è l'unico *sottogruppo connesso di L,* pertanto i suoi elementi possono essere raggiunti dall' identità del gruppo attraverso un cambiamento continuo dei parametri.
Abbiamo visto nella sezione 3.2 che attraverso l'applicazione successiva di trasformazioni infinitesime nell'intorno dell'identità si definisce una rappresentazione esponenziale del gruppo, che riscriviamo

$$D(a) = \lim_{k\to\infty} \left(I + i \sum \frac{a_i}{k} X_i \right)^k = e^{i\Sigma a_i X_i} \tag{4.45}$$

dove a_i sono i parametri infinitesimi e X_i i generatori.
Dalle matrici che rappresentano i boost (4.38), (4.39), (4.40) e dalle matrici che rappresentano le tre rotazioni attorno agli assi (4.42), (4.43), (4.44) si ricavano i 6 generatori infinitesimi dell'algebra.
Per i boost si ha

$$K_x = \left(-i\frac{\partial \Lambda_{B_x}}{\partial \phi}\right)_{\phi=0} = -i\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

e

$$K_y = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

$$K_z = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.48}$$

Per le rotazioni si hanno i seguenti

$$J_x = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

$$J_y = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.50}$$

$$J_z = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

Le matrici J_i e K_i formano una base per l'algebra di Lie del gruppo di Lorentz. Calcolando esplicitamente le relazioni di commutazione tra i generatori si ricava

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \tag{4.52}$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k \tag{4.53}$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k \tag{4.54}$$

Una conseguenza immediata di queste relazioni è che le trasformazioni di velocità non formano un gruppo, in quanto i generatori K non formano un'algebra chiusa sotto l'operazione di commutazione.

Ponendo $\boldsymbol{J} = (J_1, J_2, J_3)$ e $\boldsymbol{K} = (K_1, K_2, K_3)$, possiamo rappresentare gli elementi dell'algebra del gruppo $L_+^\uparrow$ come

$$D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi}) = e^{i(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{J}+\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{K})} \tag{4.55}$$

In particolare

$$D(\boldsymbol{\theta}, 0) = e^{i(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{J})} \tag{4.56}$$

rappresenta una rotazione di angolo $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$ attorno all'asse $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\theta}/\theta$, mentre

$$D(0, \boldsymbol{\phi}) = e^{i(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{K})} \tag{4.57}$$

rappresenta un boost di rapidità $\phi = |\boldsymbol{\phi}|$ lungo l'asse $\widehat{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi}/\phi$.
Da un punto di vista fisico $\boldsymbol{J}$ e $\boldsymbol{K}$ rappresentano, in unità naturali, rispettivamente il *momento angolare* e *il moto del centro di massa.*

4.3 RELAZIONE TRA $L_+^\uparrow$ E $SL(2,\mathbb{C})$

Studiamo ora la relazione tra $L_+^\uparrow$, ovvero $SO(3,1)$, con il gruppo speciale delle matrici complesse 2×2, indicato con $SL(2,\mathbb{C})$. Procediamo in analogia con quanto fatto nella sezione 2.3 definendo

$$X = x^\mu \sigma_\mu = x^0\sigma_0 + \sum_{i=1}^{3} x^i\,\sigma_i = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

dove $\sigma_\mu = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_0, \boldsymbol{\sigma})$, con σ_0 matrice identità 2×2 e σ_i $(i = 1,2,3)$ le matrici di Pauli.
Osserviamo le seguenti proprietà per la matrice X

$$X = X^\dagger \quad e \quad \det X = x_\mu x^\mu = (x^0)^2 - |\boldsymbol{x}|^2 \tag{4.59}$$

e quindi la (4.58) mette in corrispondenza i quadrivettori posizione x^μ con le matrici hermitiane 2×2.
Consideriamo ora la trasformazione indotta su X da una generica $A \in SL(2,\mathbb{C})$

$$X' = AXA^\dagger \quad \Longrightarrow \quad \det X' = \det X\,, \qquad X'^\dagger = X' \tag{4.60}$$

Dal momento che X' è ancora hermitiana, possiamo scriverla come combinazione lineare delle σ_μ con opportuni coefficienti x'^μ, ovvero

$$X' = x'^\mu \sigma_\mu \tag{4.61}$$

D'altra parte, essendo $\det X' = \det X$, questo tipo di trasformazioni lasciano x^2 invariato, e inoltre una composizione di due $A, B \in SL\,(2,\mathbb{C})$ porta ad una trasformazione dello stesso tipo. Quanto detto implica che alla trasformazione matriciale $A \in SL(2,\mathbb{C})$ corrisponde una trasformazione di Lorentz $\Lambda \in O(3,1)$; tale identificazione tra le matrici di $SL(2,\mathbb{C})$ e le trasformazioni di Lorentz definisce una rappresentazione bidimensionale del gruppo di Lorentz ristretto, detta *rappresentazione spinoriale,* in quanto agisce sui vettori di $\mathbb{C}^2$ detti appunto spinori.

Osservando i commutatori che generano il gruppo di Lorentz, notiamo che la (4.52) definisce l'algebra del gruppo $SO(3)$ delle rotazioni 3-dimensionale omomorfo a $SU(2)$, pertanto possiamo identificare i generatori delle rotazioni con

$$\boldsymbol{J} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \tag{4.62}$$

Analogamente, le relazioni (4.53) e (4.55) sono soddisfatte ponendo

$$\boldsymbol{K} = \pm i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \tag{4.63}$$

Entrambi i segni di $\boldsymbol{K}$ realizzano l'algebra del gruppo di Lorentz, pertanto si individuano *due rappresentazioni distinte di* $L_+^\uparrow$. Introduciamo ora

$$A = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} + i\boldsymbol{K}) \tag{4.64}$$

$$B = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} - i\boldsymbol{K}) \tag{4.65}$$

Le (4.64) e (4.65) definiscono un cambiamento di base dell'algebra del gruppo $L_+^\uparrow$, e le relazioni di commutazione diventano

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k \tag{4.66}$$

$$[B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k \tag{4.67}$$

$$[A_i, B_j] = 0 \tag{4.68}$$

$\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ generano separatamente il gruppo di $SU(2)$, e inoltre i due gruppi commutano, quindi sono due algebre indipendenti di $SU(2)$. Pertanto le relazioni (4.66) (4.47), (4.68) definiscono l'algebra del gruppo *prodotto diretto* $SU(2)\otimes SU(2)$.
Si è quindi dimostrato che l'algebra del gruppo di Lorentz è omomorfa al gruppo $SU(2)\otimes SU(2)$: non sono però gruppi isomorfi. Infatti $L_+^\uparrow$ non è un gruppo compatto[4] mentre $SU(2)\otimes SU(2)$ sì. Le rappresentazioni delle algebre di $SU(2)$ sono *irriducibili,* e i due *Casimir* delle singole algebre sono $\boldsymbol{A}^2$ e $\boldsymbol{B}^2$, e quindi anche di $SU(2)\otimes SU(2)$. Quindi $\boldsymbol{A}^2$ e $\boldsymbol{B}^2$ commutano con tutti gli operatori dell'algebra, e per il *Lemma di Shur* sono multipli dell'identità, che scriviamo come

$$\boldsymbol{A}^2 = j(j+1)I \tag{4.69}$$

$$\boldsymbol{B}^2 = j'(j'+1)I \tag{4.70}$$

[4] Basta osservare che il parametro rapidità ϕ definite nella (4.37) non è limitato, e quindi la varietà associata a $L_+^\uparrow$ non è limitata.

e quindi $j(j+1)$ e $j'(j'+1)$ sono gli *autovalori* dei due Casimir.

Indichiamo con (j, j') la rappresentazione del gruppo, il primo indice legato ad $\boldsymbol{A}$ e il secondo a **B**. Abbiamo visto che identificando $\boldsymbol{K}$ con la (4.63) entrambi i segni realizzano l'algebra del gruppo di Lorentz; ponendo

$$\boldsymbol{K} = -i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2}}, \qquad \left(\boldsymbol{J} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A} = \dfrac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \\ \boldsymbol{B} = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{rappresentazione } \left(\frac{1}{2}, 0\right) \tag{4.71}$$

Se invece

$$\boldsymbol{K} = i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2}}, \qquad \left(\boldsymbol{J} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A} = 0 \\ \boldsymbol{B} = \dfrac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \end{cases} \longrightarrow \text{rappresentazione } \left(0, \frac{1}{2}\right) \tag{4.72}$$

Possiamo allora definire due tipi di spinori bidimensionali. I primi, che denotiamo con ξ, si trasformano secondo la rappresentazione $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e i secondi, indicati con η, secondo la rappresentazione $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, e quindi

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right): \quad \xi \longrightarrow \xi' = e^{i\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot\boldsymbol{\theta} - i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot\boldsymbol{\phi}\right)}\xi = e^{i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{\theta} - i\boldsymbol{\phi})}\xi = M\xi \tag{4.71}$$

$$\left(0, \frac{1}{2}\right): \quad \eta \longrightarrow \eta' = e^{i\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot\boldsymbol{\theta} + i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot\boldsymbol{\phi}\right)}\eta = e^{i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{\theta} + i\boldsymbol{\phi})}\eta = N\eta \tag{4.72}$$

È importante notare che le rappresentazioni $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ appena introdotte sono rappresentazioni *inequivalenti*, e dunque non è possibile passare da una all'altra mediante una trasformazione di similitudine. Per passare da una all'altra è necessaria una coniugazione complessa:

$$N = SM^*S^{-1} \quad \text{con} \quad S = -i\sigma_2 \tag{4.73}$$

che si verifica utilizzando la relazione $\sigma_2\boldsymbol{\sigma}^*\sigma_2 = -\boldsymbol{\sigma}$.

4.3.1 Equazione di Dirac

Introduciamo *l'operazione di parità* P, definita come l'operazione che effettua una *trasformazione di inversione spaziale delle coordinate*, ovvero cambia il segno di ognuna di esse

$$P\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \tag{4.74}$$

I vettori invarianti per trasformazioni di parità sono detti *assiali*, come ad esempio il momento angolare: $\boldsymbol{J} \xrightarrow{P} \boldsymbol{J}$. I vettori che cambiano segno per una operazione di parità sono detti *polari*, ad esempio la velocità: $\boldsymbol{v} \xrightarrow{P} -\boldsymbol{v}$. Sotto un'operazione di parità quindi, anche i generatori dei boost cambiano segno come le componenti del vettore velocità, $\boldsymbol{K} \xrightarrow{P} -\boldsymbol{K}$, mentre i generatori delle rotazioni, rappresentate dall'operatore momento angolare, non cambiano segno $\boldsymbol{J} \xrightarrow{P} \boldsymbol{J}$. In altre parole, un'operazione di parità scambia le due rappresentazioni spinoriali,

$$\begin{cases} \boldsymbol{J} \xrightarrow{P} \boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{K} \xrightarrow{P} -\boldsymbol{K} \end{cases} \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) \overset{P}{\leftrightarrow} \left(0, \frac{1}{2}\right) \tag{4.75}$$

e quindi

$$\xi \overset{P}{\leftrightarrow} \eta \tag{4.76}$$

Se vogliamo introdurre l'operazione parità nel gruppo di Lorentz non possiamo considerare le due rappresentazioni $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ separatamente. Introduciamo quindi lo spinore a quattro componenti così costruito:

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} \tag{4.77}$$

Lo spinore (4.77) è chiamato *spinore di Dirac*, e la notazione $\phi_{R,L}$ va a sottolineare il ruolo di spinori sinistrorsi e destrorsi giocato da ognuno di essi. Lo spinore di Dirac si trasforma secondo la somma diretta $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)$ delle due rappresentazioni spinoriali note. Quindi, per una trasformazione di Lorentz ψ si trasforma come

$$\begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} \xrightarrow{\Lambda} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}(\boldsymbol{\theta} - i\boldsymbol{\phi})} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}(\boldsymbol{\theta} + i\boldsymbol{\phi})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(\Lambda) & 0 \\ 0 & \overline{M}(\Lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} \tag{4.78}$$

con $\overline{M}(\Lambda) = SM^*(\Lambda)S^{-1} = N$, mentre per una trasformazione di parità si trasforma come

$$\begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{P}} \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} \tag{4.79}$$

L'introduzione della parità mette in comunicazione le due rappresentazioni, che come abbiamo detto differiscono per uno scambio di segno del generatore dei boost $\boldsymbol{K}$, ovvero per una inversione spaziale degli assi. La parità, quindi, estende la rappresentazione $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)$ al gruppo di Lorentz ortocrono $L^{\uparrow}$. Tale rappresentazione è *irriducibile*, e come si vede dalla (4.78) *non è unitaria*; ciò segue dal fatto che le matrici $e^{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}}$ non sono unitarie. Pertanto abbiamo una rappresentazione finito-dimensionale e non unitaria del gruppo di Lorentz. Ma in meccanica quantistica, in presenza di una simmetria continua gli stati fisici *non possono trasformarsi secondo rappresentazioni non unitarie del gruppo di simmetria*. Infatti, come afferma il teorema di Wigner, una trasformazione degli stati deve preservare l'interpretazione probabilistica, e questo avviene solo per mezzo di trasformazioni unitarie, ovvero

$$P(\psi \to \psi_1) = |\langle\psi|\psi_1\rangle|^2 = P(\psi' \to \psi_1') \tag{4.80}$$

con $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$, e quindi

$$\langle\psi'|\psi_1'\rangle = \langle\psi\middle|U^\dagger U\middle|\psi_1\rangle = \langle\psi|\psi'\rangle \quad \Longrightarrow \quad U^\dagger U = I \tag{4.81}$$

Pertanto da un punto di vista fisico, la rappresentazione del gruppo di Lorentz studiata finora non corrisponde a trasformazioni di stati fisici; da un punto di vista fondamentale, la trattazione svolta non è completa. Esiste un teorema che garantisce che un gruppo non compatto ammette rappresentazioni unitarie *infinito dimensionali*. In realtà, il fisico ungherese Wigner mostrò che il gruppo fondamentale in fisica delle particelle non è il gruppo di Lorentz omogeneo considerato finora, bensì il gruppo di Lorentz *non omogeneo (gruppo di Poincaré)* che include le traslazioni nello spazio tempo. Un'analisi di questo gruppo fornisce, come vedremo successivamente, una piena comprensione della natura dello spin.

Analizziamo dettagliatamente la trasformazione (4.78) nel caso di una *trasformazione di velocità* ($\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$). Per la componente ϕ_R si ha

$$\phi_R \longrightarrow e^{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}}\phi_R = \left[\cosh\frac{\phi}{2} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\sinh\frac{\phi}{2}\right]\phi_R \tag{4.82}$$

dove $\boldsymbol{n}$ è un vettore unitario nella direzione del boost.

Supponiamo che lo spinore iniziale sia riferito ad una particella a riposo, $\phi(0)$, e la trasformazione $M(0,\boldsymbol{\phi})$ restituisca uno spinore che descrive una particella di momento $\boldsymbol{p}, \phi(\boldsymbol{p})$.

Dalle (4.36), e facendo uso delle formule di bisezione per le funzioni iperboliche ($\cosh\frac{\phi}{2} = \left[\frac{1+\cosh\phi}{2}\right]^{1/2} = \left[\frac{1+\gamma}{2}\right]^{1/2}, \sinh\frac{\phi}{2} = \left[\frac{\cosh\phi-1}{2}\right]^{1/2} = \left[\frac{\gamma-1}{2}\right]^{1/2}$), la (4.82) diventa

$$\phi_R(\boldsymbol{p}) = \left[\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{1/2} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{1/2}\right]\phi_R(0) \tag{4.83}$$

Per una particella di energia (totale) E, massa m e momento $\boldsymbol{p}$, $\gamma = E/m \ \ (c = 1)$, e la (4.83) diventa

$$\phi_R(\boldsymbol{p}) = \frac{E + m + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{[2m(E+m)]}\phi_R(0) \tag{4.84}$$

In modo simile si trova

$$\phi_L(\boldsymbol{p}) = \frac{E + m - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{[2m(E+m)]}\phi_L(0) \tag{4.85}$$

Quando una particella è a riposo, non è possibile definirne la *chirialità*, e quindi possiamo imporre $\phi_R(0) = \phi_L(0) = \phi(0)$. Moltiplicando la (4.85) per $(E + m + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})$ si trova

$$\phi(0) = (E + m + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})\phi_L(\boldsymbol{p}), \tag{4.86}$$

avendo utilizzato la relazione $E^2 = p^2 + m^2$, e sostituito il termine

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})^2 = \sum_{ij} \sigma_i \sigma_j p_i p_j = \sum_{ij} \left(i\epsilon_{ijk}\sigma_k p_i p_j + \delta_{ij} p_i p_j \right) = |\boldsymbol{p}|^2, \tag{4.87}$$

dove il primo termine della penultima eguaglianza è nullo in quanto il prodotto $p_i p_j$ è simmetrico per lo scambio $i \leftrightarrow j$. Sostituendo poi la (4.86) nella (4.84) e riutilizzando la relazione precedente si ottiene

$$\phi_R(\boldsymbol{p}) = \frac{E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{m} \phi_L(\boldsymbol{p}) \tag{4.88}$$

e quindi

$$\phi_L(\boldsymbol{p}) = \frac{E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{m} \phi_R(\boldsymbol{p}) \tag{4.89}$$

Riscriviamo queste equazioni come

$$\begin{cases} -m\phi_R(\boldsymbol{p}) + (E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})\phi_L(\boldsymbol{p}) = 0 \\ (E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})\phi_R(\boldsymbol{p}) - m\phi_L(\boldsymbol{p}) = 0 \end{cases} \tag{4.90}$$

che in forma matriciale diventano

$$\begin{pmatrix} -m & E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} \\ E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R(\boldsymbol{p}) \\ \phi_L(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} = 0. \tag{4.91}$$

Poniamo ora $\psi(p) = \begin{pmatrix} \phi_R(\boldsymbol{p}) \\ \phi_L(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}$ e introduciamo il quadrivettore $p^\mu = (E, \boldsymbol{p}) = (p_0, \boldsymbol{p})$. Definendo le matrici 4×4

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.92}$$

l'equazione (4.87) diventa

$$\left(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i - m \right) \psi(p) = 0 \tag{4.93}$$

o in forma più compatta

$$\left(\gamma^\mu p_\mu - m \right) \psi(p) = 0. \tag{4.94}$$

Questa è l'equazione di Dirac per una particella di spin $\frac{1}{2}$.

In caso di particelle di massa nulla, le equazioni (4.90) si disaccoppiano in due equazioni separate, una per ogni spinore bidimensionale

$$\begin{cases}(p_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})\phi_L(\boldsymbol{p}) = 0 \\ (p_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})\phi_R(\boldsymbol{p}) = 0\end{cases} \tag{4.95}$$

Queste sono note come *equazioni di Weyl* e gli spinori $\phi_L(\boldsymbol{p})$ e $\phi_R(\boldsymbol{p})$ sono gli spinori di Weyl. Inoltre, per particelle di massa nulla $E = p_0 = |\boldsymbol{p}|$, le equazioni (4.95) portano a

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})\phi_L(\boldsymbol{p}) = -\phi_L(\boldsymbol{p}) \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})\phi_R(\boldsymbol{p}) = \phi_R(\boldsymbol{p})\end{gathered} \tag{4.96}$$

L'operatore $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}$ misura la componente dello spin nella direzione del momento, e questa quantità è chiamata *elicità*. Gli spinori di Weyl sono dunque gli *autovettori* dell'operatore elicità, e gli autovalori positivi corrispondono agli autostati $\phi_R(\boldsymbol{p})$ mentre quelli negativi a $\phi_L(\boldsymbol{p})$, da cui l'adeguatezza dell'identificazioni in destrorsi e sinistrorsi.
E per particelle massive? Se si pone $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$, l'elicità è nulla per entrambi gli stati e non ha più senso distinguerli in destrorsi e sinistrorsi, pertanto questi coincidono: $\phi_R(0) = \phi_L(0)$.

Concludiamo questa sezione, osservando che il modo in cui abbiamo ricavato l'equazione di Dirac differisce da quella originariamente derivata da Dirac. Prima della conquista di tale equazione ci furono altri tentativi di scrivere un'equazione quanto-relativistica adeguata, e un primo tentativo portò all'equazione di *Klein-Gordon*

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m\right)\psi = 0 \tag{4.97}$$

che si può ottenere (almeno in modo euristico), come per l'equazione si Schroedinger, a partire dalla relazione energia-impulso e sostituendo le variabili E e $\boldsymbol{p}$ con i corrispondenti operatori differenziali. Cioè, nel caso relativistico, da $p^\mu p_\mu = m^2$ con $p^\mu = (E, \boldsymbol{p}) \rightarrow i\partial^\mu = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla}\right)$.
Senza entrare nei dettagli, ci si accorse che l'equazione di Klein-Gordon non era adatta ad una descrizione quanto-meccanica, in quanto presentava due immediate problematiche: non ammette un'interpretazione probabilistica, e inoltre l'equazione agli autovalori per l'operatore energia porta ad avere stati con energia positiva e *negativa*. Queste problemi portarono Dirac a modificare l'equazione (4.97), imponendo delle condizioni "ad hoc" per superare le difficoltà elencate, arrivando a scrivere la (4.94). L'equazione di Dirac porta ad una corretta interpretazione probabilistica, ma anche nell'ambito di questa si trovano *autostati a energia negativa*. Per risolvere questo paradosso, egli introdusse in concetto di un *mare* costituito da infinite particelle che occupano tutti gli stati di energia negativa. Se si sottrae al mare di Dirac una particella di energia negativa (creando così una "lacuna"), lo stato che si ottiene corrisponde a una particella di energia positiva e di carica opposta (cioè un'*antiparticella*). Le antiparticelle sarebbero quindi associate all'*assenza* di particelle di energia negativa. Sebbene l'idea del mare di Dirac sia stata superata dalla moderna teoria quantistica dei campi, questa interpretazione si rivelò corretta per quanto

riguarda l'ipotesi dell'esistenza delle antiparticelle. Nella teoria quantistica dei campi non c'è bisogno di considerare stati a energia negativa, ma si associa a ogni particella (di energia positiva) un'antiparticella (sempre di energia positiva) e queste vengono descritte da uno stesso ente fisico, *il campo quantistico.*

4.4 Aspetti del gruppo di Poincaré

Come visto nella sezione 4.1, le più generali trasformazioni lineari che lasciano invariato l'intervallo tra due eventi sono le trasformazioni di Poincaré (TP),

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}. \tag{4.98}$$

Le trasformazioni di Poincaré sono caratterizzate, oltre che dalla matrice di Lorentz $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$, dalle costanti a^{μ}, e quindi dipendono da 6+4=10 parametri reali. Indicheremo formalmente una TP con $\{\Lambda, a\}$. Come casi particolari, per $\Lambda = I$ si ha $\{I, a\}$, che è una pura traslazione spazio-temporale; per $a^{\mu} = 0$ si ha $\{\Lambda, 0\}$, che è una trasformazione di Lorentz omogenea. Ogni TP può essere decomposta in modo unico nel prodotto di una TL omogenea e di una traslazione:

$$\{\Lambda, a\} = \{I, a\}\{\Lambda, 0\}. \tag{4.99}$$

Le TP costituiscono un gruppo di Lie a 10 parametri, detto *gruppo di Poincaré* (P). La legge di composizione di due TP si ricava da

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \qquad x''^{\mu} = \Lambda'^{\mu}{}_{\nu} x'^{\nu} + a'^{\mu}, \tag{4.100}$$

da cui

$$x''^{\mu} = \Lambda'^{\mu}{}_{\nu}\left(\Lambda^{\nu}{}_{\rho} x^{\rho} + a^{\nu}\right) + a'^{\mu} = \Lambda'^{\mu}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\rho} x^{\rho} + \Lambda'^{\mu}{}_{\nu} a^{\nu} + a'^{\mu} \tag{4.101}$$

e quindi

$$\{\Lambda', a'\}\{\Lambda, a\} = \{\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a'\} \tag{4.102}$$

L'elemento identità è $\{I, 0,\}$, e $\{\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a\}$ è l'inverso di una generica TP. Il gruppo delle traslazioni T e il gruppo di Lorentz L sono sottogruppi del gruppo di Poincaré; inoltre T è un sottogruppo abeliano invariante di P. Vediamo ora la struttura dell'algebra di Lie del gruppo. Già conosciamo le regole di commutazione dei generatori del gruppo di Lorentz proprio,

$$\begin{cases} [J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \\ [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k. \end{cases} \tag{4.103}$$

È conveniente esprimere i generatori come elementi di un quadritensore anti-simmetrico, $J^{\mu\nu}$

$$J^{\mu\nu} = \begin{cases} J^{ij} = -J^{ji} = \epsilon_{ijk} J_k \\ J^{i0} = -J^{0i} = -K_i \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ -K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ -K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ -K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.104)$$

quindi $J^{10} = -K_1,\ J^{20} = -K_2,\ J^{12} = J_3, \ldots$ Le regole di commutazione si riassumono in

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}) \qquad (4.105)$$

Per completare l'algebra del gruppo di Poincaré dobbiamo aggiungere i generatori delle traslazioni e ricavarne le regole di commutazione. Consideriamo a tal proposito, una traslazione infinitesima,

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu} \qquad (4.106)$$

dove ϵ^{μ} sono parametri infinitesimi, che possiamo scrivere come $\epsilon^{\mu} = \epsilon^{\nu} \partial_{\nu} x^{\mu}$, e quindi

$$x'^{\mu} = (1 + \epsilon^{\nu} \partial_{\nu} x^{\mu}) x^{\mu} = (1 - i\epsilon^{\nu} P_{\nu}) x^{\mu}. \qquad (4.107)$$

Gli operatori

$$P_{\nu} = i\partial_{\nu} \qquad (4.108)$$

sono i *generatori* del gruppo delle traslazioni. Essi evidentemente commutano:

$$[P^{\mu}, P^{\nu}] = 0 \qquad (4.109)$$

Dal punto di vista fisico, P^{μ} è l'operatore quantistico energia-momento (in unità naturali); la componente $P_0 = \widehat{H}$ è l'operatore *Hamiltoniana*, e genera traslazioni temporali, mentre $\widehat{\boldsymbol{P}}$ è l'operatore *momento* e genera traslazioni spaziali.
Le relazioni di commutazione mancanti tra i generatori del gruppo di Lorentz e delle traslazioni si ricavano a partire dalla generica trasformazione di Poincaré infinitesima, che si ottiene sommando una trasformazione di Lorentz ristretta infinitesima $\left(\Lambda = \mathrm{I} + \omega = I + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma}\right)$ con una traslazione infinitesima $\left(T = I - i\epsilon_{\mu} P^{\mu}\right)$:

$$\Pi(I + \omega, \epsilon) = I + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i\epsilon_{\mu} P^{\mu} \qquad (4.110)$$

Consideriamo la seguente identità

$$\{\Lambda^{-1}, 0\}\{I + \omega, \epsilon\}\{\Lambda, 0\} = \{\Lambda^{-1}, 0\}\{(I + \omega)\Lambda, \epsilon\} = \{\Lambda^{-1}(I + \omega)\Lambda, \Lambda^{-1}\epsilon\}, \qquad (4.111)$$

e riscriviamo primo e ultimo membro nella rappresentazione Π:

$$\Pi^{-1}(\Lambda, 0)\Pi(\mathrm{I} + \omega, \epsilon)\Pi(\Lambda, 0) = \Pi(\Lambda^{-1}(I + \omega)\Lambda, \Lambda^{-1}\epsilon). \qquad (4.112)$$

Sostituendo la (4.110) nella (4.112), si ottiene per il primo membro

$$\Pi^{-1}(\Lambda,0)\left(I+\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}-i\epsilon_\mu P^\mu\right)\Pi(\Lambda,0)$$
$$=I+\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\Pi^{-1}(\Lambda,0)J^{\rho\sigma}\Pi(\Lambda,0)-i\epsilon_\mu\Pi^{-1}(\Lambda,0)P^\mu\Pi(\Lambda,0), \tag{4.113}$$

mentre per il secondo membro

$$\Pi(I+\Lambda^{-1}\omega\Lambda,\Lambda^{-1}\epsilon)=I+\frac{i}{2}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}-i(\Lambda^{-1}\epsilon)_\mu P^\mu. \tag{4.114}$$

Uguagliando i termini in ω e in ϵ, si ottengono le leggi di trasformazione dei generatori

$$\Pi^{-1}(\Lambda,0)J^{\rho\sigma}\Pi(\Lambda,0)=\Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}, \tag{4.115}$$

$$\Pi^{-1}(\Lambda,0)P^\mu\Pi(\Lambda,0)=\Lambda_\nu{}^\mu P^\nu \tag{4.116}$$

La prima di queste relazioni, sostituendo $\Lambda=I+\omega$, porta a riottenere le (4.105). Ponendo nella (4.116) $\Lambda=I+\omega$,

$$\left(I-\frac{i}{2}\,\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right)P^\mu\left(I+\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right)=\left(g^\mu{}_\nu+\omega^\mu{}_\nu\right)P^\nu \tag{4.117}$$

e trascurando i termini al secondo ordine, si ottiene

$$[P^\mu,J^{\rho\sigma}]=-i(g^{\mu\rho}P^\sigma-g^{\mu\sigma}P^\rho), \tag{4.118}$$

che, assieme alla (4.109) e alla (4.105), completa l'*algebra di Lie del gruppo di Poincaré ristretto*. Conviene separare le componenti spaziali e temporali dei vari generatori e scrivere tutti i commutatori dell'algebra:

$$[P^i,P^j]=0 \tag{4.119}$$
$$[P^i,H]=0 \tag{4.120}$$
$$[J^i,J^j]=i\epsilon_{ijk}J^k \tag{4.121}$$
$$[J^i,K^j]=i\epsilon_{ijk}K^k \tag{4.122}$$
$$[J^i,P^j]=i\epsilon_{ijk}P^k \tag{4.123}$$
$$[K^i,K^j]=-i\epsilon_{ijk}J^k \tag{4.124}$$
$$[K^i,P^j]=i\delta^{ij}H \tag{4.125}$$
$$[J^i,H]=0 \tag{4.126}$$
$$[K^i,H]=iP^i \tag{4.127}$$

Osserviamo che

- I dieci generatori $\boldsymbol{K},\boldsymbol{J},P^\mu$ formano un'algebra chiusa, con sottoalgebre delle rotazioni e delle traslazioni;
- $\boldsymbol{P}$ **e** $\boldsymbol{J}$ commutano con $\mathcal{H}$ e sono costanti del moto per effetto dell'invarianza per traslazioni e per rotazioni;
- $\boldsymbol{K}$ non commuta con $\mathcal{H}$, e non dà luogo a quantità conservate.

Introduciamo ora il cosiddetto *operatore di Pauli-Lubanski* W^μ, definito da

$$W^\mu = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J_{\nu\rho}P_\sigma \tag{4.128}$$

e ortogonale a P^μ,

$$W^\mu P_\mu = 0. \tag{4.129}$$

Le regole di commutazione di W^μ sono

$$[P^\mu, W^\nu] = 0 \tag{4.130}$$
$$[J^{\mu\nu}, W^\rho] = i(g^{\nu\rho}W^\mu - g^{\mu\rho}W^\nu) \tag{4.131}$$
$$[W^\mu, W^\nu] = i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}W_\rho P_\sigma. \tag{4.132}$$

Da queste si deduce che le seguenti combinazioni di P^μ e W^μ

$$P^2 = P^\mu P_\mu\,, \qquad W^2 = W^\mu W_\mu, \tag{4.133}$$

commutano con tutti i generatori del gruppo di Poincaré e sono perciò gli *operatori di Casimir* di P. L'importanza di questi risiede nel fatto che gli *stati quantistici* di una particella singola si trasformano secondo le rappresentazioni irriducibili e unitarie del gruppo di Poincaré (che sono di dimensione infinita, dal momento che P è un gruppo non compatto), etichettate dagli autovalori di P^2 e W^2.

Consideriamo il caso di particelle di massa finita, quindi $P^2 = m^2$, e $p_0 > 0$. Poiché le componenti del quadrivettore energia-momento commutano tutte tra loro, è naturale esprimere lo stato fisico di una particella in termini delle autofunzioni del quadrimomento. Indichiamo con $|p, \sigma\rangle$ la base degli autovettori di P^μ, dove σ rappresenta i numeri quantici (ulteriori gradi di libertà che identifichiamo con lo *spin*) necessari a specificare gli stati del sistema. Per particelle di massa finita, possiamo sempre metterci nel sistema di riferimento di riposo della particella, in cui

$$p^\mu = (m, \mathbf{0}) = k^\mu \tag{4.134}$$

Evidentemente qualsiasi rotazione lascia k^μ invariato: il gruppo delle rotazioni $SU(2)$ è detto *piccolo gruppo di* k^μ. Per conoscere l'effetto di un'arbitraria trasformazione di Lorentz sui $|p, \sigma\rangle$, è sufficiente conoscere la rappresentazione del gruppo delle rotazioni (abbiamo visto che le rappresentazioni irriducibili delle rotazioni sono unitarie!). Applichiamo una trasformazione di Lorentz $L(p)$ che connette il quadrimpulso arbitrario p^μ a k^μ

$$p^\mu = L^\mu{}_\nu(p)k^\nu. \tag{4.135}$$

e in corrispondenza alla (4.135), scriviamo la

$$|p, \sigma\rangle = U[L(p)]|k, \sigma\rangle. \tag{4.136}$$

dove $U(L(p))$ realizza la TL Λ nello spazio di Hilbert (H) e $|p,\sigma\rangle, |k,\sigma\rangle \in H$. $U\big(L(p)\big)$ è un operatore unitario, e fornisce una rappresentazione del gruppo di Lorentz. Consideriamo ora l'azione di una TL

$$p^\mu \longrightarrow p'^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu \, p^\nu. \tag{4.137}$$

e la corrispondente trasformazione unitaria

$$|p,\sigma\rangle \longrightarrow U(\Lambda)|p,\sigma\rangle. \tag{4.138}$$

Considerando la (4.136), si ha

$$U(\Lambda)\big|p,\sigma\rangle = U(\Lambda)U\big(L(p)\big)\big|k,\sigma\rangle = U[L(\Lambda p)L^{-1}(\Lambda p)]U(\Lambda)U\big(L(p)\big)|k,\sigma\rangle, \tag{4.139}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo moltiplicato per l'identità del gruppo $U(I)$. Usando la proprietà distributiva troviamo

$$U(\Lambda)|p,\sigma\rangle = U[L(\Lambda p)]U[L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)]|k,\sigma\rangle \tag{4.140}$$

Ma l'azione su k^μ della successione $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ lascia k^μ invariato: si tratta cioè di una *rotazione*. Allora la rappresentazione $U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))$ è una matrice della forma $e^{i\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\theta}}$, i cui elementi gli chiamiamo $D_{\sigma\sigma'}(R)$ e con $R = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$. Dunque, riprendendo la (4.138)

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|p,\sigma\rangle &= U[L(\Lambda p)]\sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}(R)\,|k,\sigma'\rangle \\ &= \sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}(R)\,U[L(\Lambda \mathrm{p})]|k,\sigma'\rangle \\ &= \sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}(R)\,|\Lambda p,\sigma'\rangle \end{aligned} \tag{4.141}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la (4.136). Da quest'ultima relazione, concludiamo che per rappresentare il gruppo di Lorentz è sufficiente conoscere la matrice unitaria $U(\Lambda)$ della rappresentazione (2s+1) dimensionale di $SU(2)$, che connette autovettori $|p,\sigma\rangle$ nello spazio di Hilbert. Inoltre lo spin, che è stato definito come un'ulteriore indice per indicare lo stato fisico di una particella, è influenzato da dalla TL ed è rappresentato dal gruppo delle rotazioni $SU(2)$ che lascia k^μ invariato.

Nella discussione appena fatta, abbiamo considerato il caso di particelle di massa finita, e abbiamo visto che l'esigenza di definire un numero quantico di spin è emerso in modo naturale, come conseguenza di una particolare simmetria di rotazione per il gruppo $SU(2)$.
In natura si realizza un'ulteriore stato possibile, che corrisponde a particelle di massa nulla, e per il quale gli operatori di Casimir soddisfano

$$P^2 = W^2 = 0. \tag{4.142}$$

Non tratteremo qui questo caso, ma vale la pena sottolineare che il quadrimpulso associato a questa classe di particelle deve essere tipo luce ($p^2 = 0 \; e \; p^0 > 0$), e dalle simmetrie associate a questi stati emerge un ulteriore invariante con le dimensioni di un momento angolare, l'elicità λ. Inoltre, per via dell'ortogonalità dei quadrivettori P^μ e W^μ e della (4.140), si dimostra che P^μ e W^μ sono proporzionali, e la costante di proporzionalità è l'elicità λ, e vale $\pm s$ (dove s è lo spin della particella). Vale la pena di aggiungere, infine, che per particelle di massa nulla il concetto di spin non è definibile allo stesso modo che per particelle massive in quanto l'algebra associata non è quella del gruppo delle rotazioni $SU(2)$. Ciò è evidente dal fatto che non è definibile un sistema di riferimento di riposo per particelle massive, e quindi non si possono avere tutte le componenti spaziali di p^μ nulle.

CONCLUSIONI

Riassumiamo brevemente i risultati principali discussi nel presente lavoro di tesi.

Abbiamo introdotto attraverso definizioni formali le proprietà che caratterizzano in generale una struttura di gruppo. In particolare abbiamo visto come gruppi diversi possono essere legati attraverso il concetto di omomorfismo, applicazioni che permettono di associare elementi di un gruppo a quelli di un altro, preservandone la legge.
Successivamente abbiamo introdotto la teoria delle rappresentazioni dei gruppi che permette di identificare gli elementi di un gruppo astratto in termini di applicazioni lineari tra spazi vettoriali, e quindi come gruppi di matrici. In questo contesto si sono studiati i gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$, facendo emergere il legame tra i due secondo il quale trasformazioni di similitudine con matrici di $SU(2)$ rappresentano delle rotazioni in $SO(3)$.
Si è poi completata la trattazione formale sui gruppi introducendo i gruppi di Lie, gruppi i cui elementi possono variare in maniera continua in funzione di alcuni parametri continui. Lo studio dei gruppi di Lie è stato condotto attraverso l'algebra ad essi associata, che permette di studiare la struttura del gruppo in maniera infinitesima mediante piccole perturbazioni nell'intorno dell'identità, e rappresentare gli elementi di questo intorno attraverso una rappresentazione esponenziale, determinata dai generatori infinitesimi del gruppo. Abbiamo poi studiato gli esempi di SO(3) e SU(2), trovando che essi sono caratterizzati dalla stessa algebra.
Nell'ultima parte del lavoro abbiamo introdotto le trasformazioni di Lorentz omogenee e le trasformazioni di Poicaré, dimostrando che queste due classi di trasformazioni formano una struttura di gruppo. Studiando l'algebra del gruppo di Lorentz (GL), abbiamo dimostrato che questa ha sei generatori, tre legati alle rotazioni e tre legati ai *boost*. In particolare, restringendo lo studio al gruppo di Lorenz ristretto ($L_{-}^{\dagger}$), abbiamo provato che la sua algebra è omomorfa a quella del gruppo prodotto diretto $SU(2)\otimes SU(2)$, e quindi che esistono due rappresentazioni distinte del gruppo ristretto di Lorentz: queste due rappresentazioni individuano due tipi di spinori che sotto trasformazioni di Lorenz si trasformano in maniera differente. Estendendo poi la rappresentazione del gruppo di Lorenz introducendo l'operazione di parità, e studiando la relazioni tra gli spinori $\left(\frac{1}{2},0\right)$ e $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ è emersa in modo naturale l'equazione di Dirac per particelle di spin $\frac{1}{2}$. Infine, abbiamo considerato il gruppo di Lorentz non omogeneo e ricavato le regole che ne caratterizzano l'algebra. Si sono definiti in particolare i suoi operatori di Casimir, sottolineando l'importanza fisica di questi, in quanto gli *stati fisici* delle particelle si trasformano secondo le rappresentazioni irriducibili del gruppo di Poincaré, etichettate dagli autovalori dei due Casimir. Abbiamo così trovato che per gli stati fisici di una particella massiva, i numeri quantici di spin emergono in modo del tutto naturale quando si considerano rappresentazioni irriducibili degli stati.

BIBLIOGRAFIA

[1] Wu-Ki-Tung, Group Theory in Physics, World Scientific, Singapore, 1985

[2] V.Barone, Relatività, Bollati Boringhieri, Torino, 2004

[3] G.Cicogna, Metodi Matematici della Fisica, Springer, Milano, 2008

[4] I.Borsi, Lezioni di Metodi Matematici per la Fisica, Creative Commons,2008

[5] K.Konishi-G.Paffuti, Meccanica Quantistica: nuova introduzione, Pisa University Press, Pisa, 2005

[6] L.H.Ryder, Quantum Field Theory,2, Cambridge University Press, Cambridge, 1996

[7] G.Salmè, Elementi di Teoria dei Gruppi.